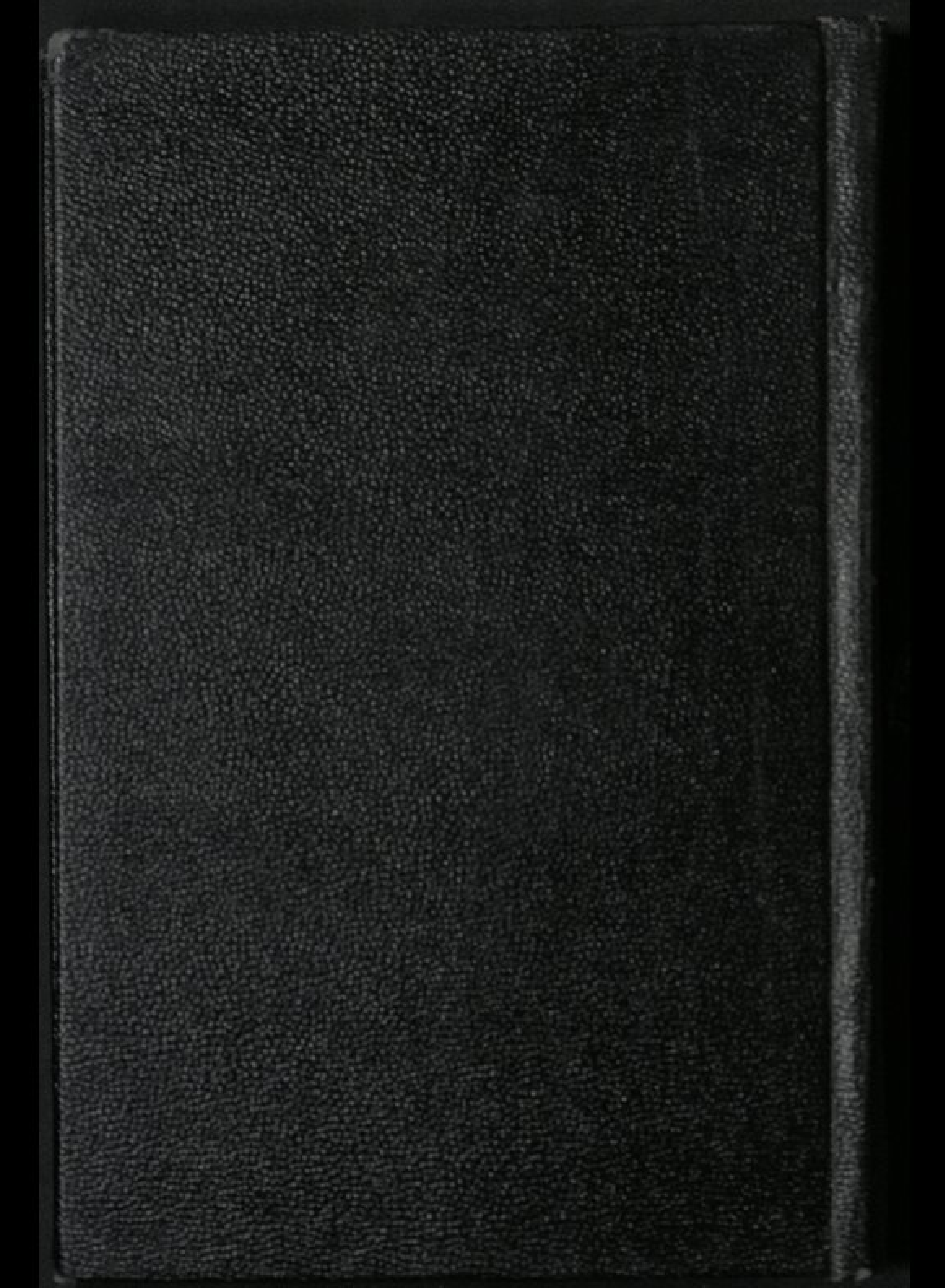
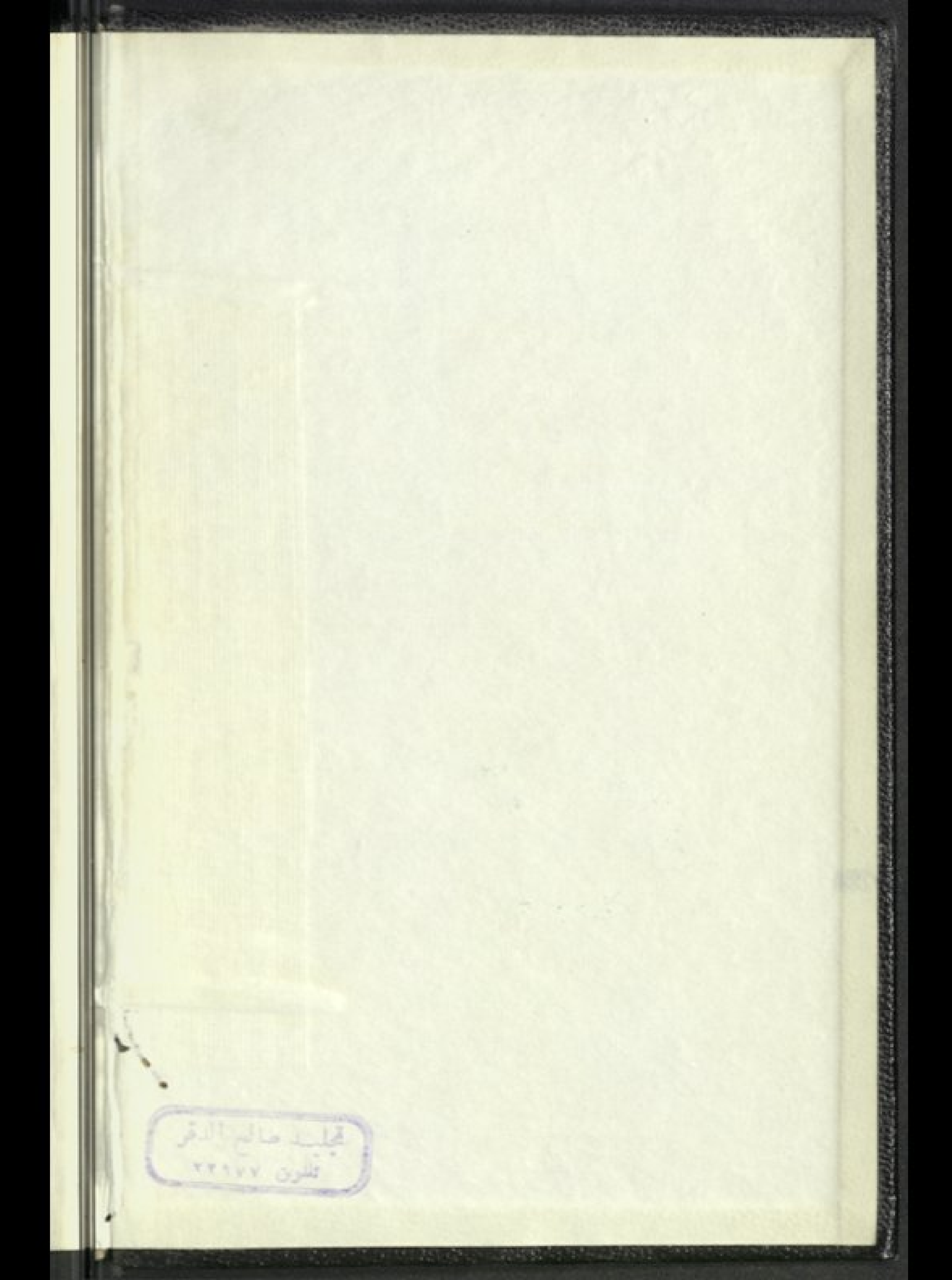
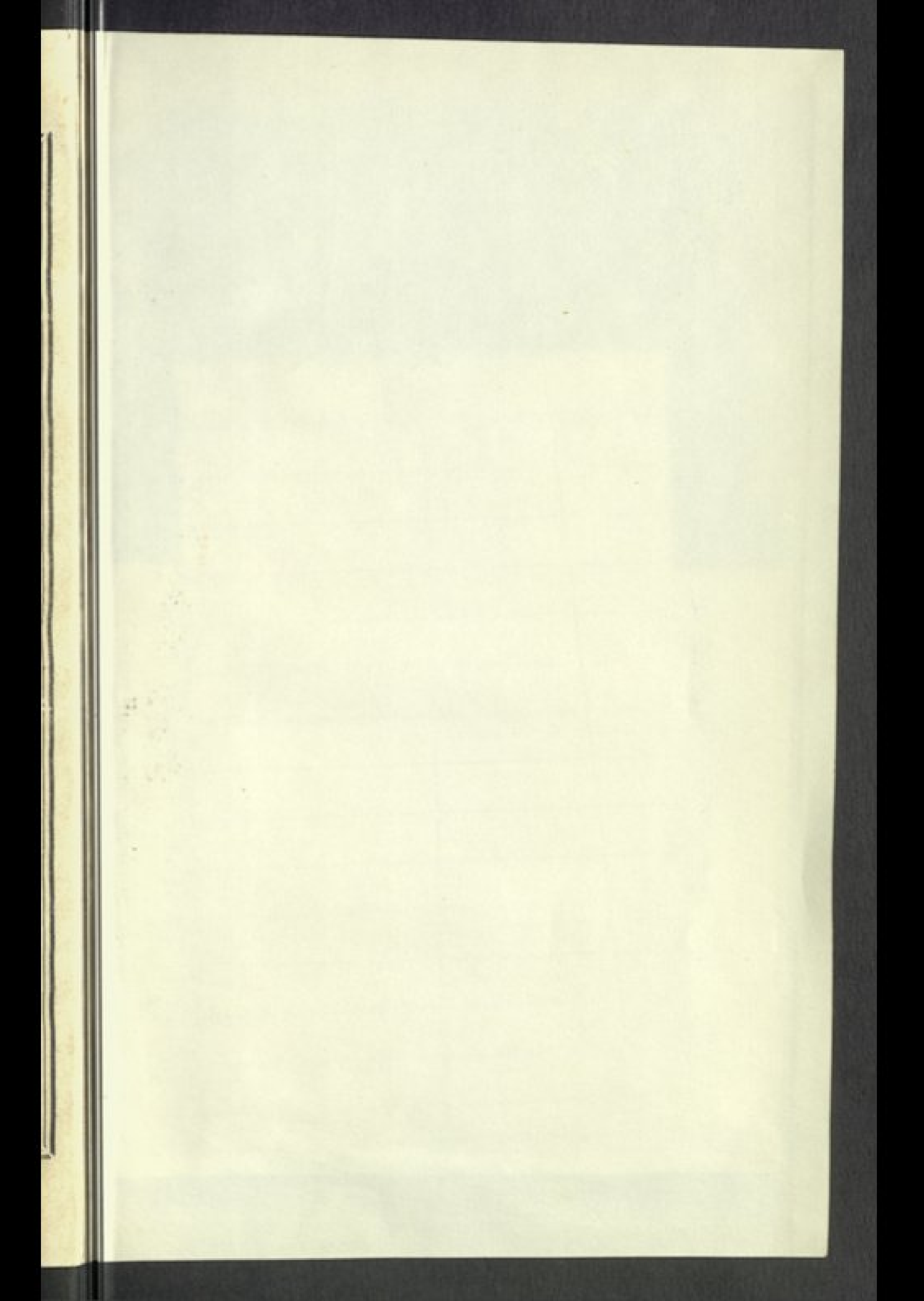






سبائك التبر في أصول الجبر

تأليف

جبران يوسف لبّس

الجزء الاول

طبع بالمطبعة الادبية في بيروت سنة ١٩٠٠

مقدمة الكتاب

نحمد الله تعالى وليّ النهي والامر * والواهب الخواطر نعمة الجبر * اما بعد فهذا كتاب في اصول الجبر العربي الاصل * المفصح عما للناطقين بالضاد من سابق الفضل * دعاني الى تأليفه حبّ القيام بخدمة علمية * الا وهي ان اردّ الى معدن لغتنا العربية * سبائك تبر اكتشف ابناؤها اسرارها وكنوزها * واختبروا دقائقها ورموزها * وقد ازدانت الان نحور اللغات بحلاها * وهي عندنا مزجاة في احدى الخبايا * اذ اصبحت مصنفات الجبر قليلة الوجود * لا تفينا بالغرض المقصود * مع كثرتها واتساع نطاقه في سائر اللغات * بتوصل اربابه العاملين الى كشف عدة طرق وبينات * فشمرت بعون الله عن ساعد الجد * وبذلت غاية الوسع والجهد لادراك الضالة المنشودة * والبغية المقصودة * فجئت فيه على اساليب تروق للطالع والدارس * وهانذا ازفه الى الادباء الافاضل وعمد المدارس * راجياً ان ينتقدوه بعين الروية والاختبار * ويتحفوني بما يرونه من الملاحظات وسديد الاراء * ولهم سلفاً مزيد الشكر والثناء * فانما اعتمدت بذلك ايفاء خدمةٍ علميةٍ وطنية * فان احسنت فلله * والا فقلما يدرك المرء متمناه * وبالله المستعان آمين

تنسيق الكتاب

١ً راعيت في بيان قواعده وحقائقه وشوارده * مدارك التلميذ الحسابية ومعلوماته النظرية * على قدر ما تسمح لهُ بهِ كتبنا العربية * اذ لا يصحّ الاستناد الى قضايا لم تثبت في موءلفاتنا * والاكتفاء بالاشارة الى عمليات لم تتعود عليها اقلام تلامذتنا * فننسج على منوال الموءلفات الغربية * وتروح سهامنا طائشة غير مصيبة

٢ً توجت الكتاب بما يفيد المتعلم ويروق للمعلم اذ يستدل بهِ على مقدرة كل من تلامذته في الحساب * ويحكم بمن فيهِ الكفاءة لدرس هذا الفن منهم * فيستدرك قبل حين تحقيق رغائبه * وبلوغ اثمار اتعابه * فضلاً عن ان التلميذ يتفهم لغة الجبر ومقاصده * ويتحقق فضله على الحساب وفوائده * فيطرق بابه عن رغبة ويوسع لهُ فكره وقلبه

٣ً قسمت ابوابه وفصوله * على نوع يسهل ادراكه ويقرّب مناله وشفعت كل قاعدةٍ بالبينات اللازمة عليها * والملاحظات والنتائج اللاحقة بها * مسهباً فيما استلزم التوضيح * مختصرًا ما تفي حقه الدلالة والتلميح

٤ً ذيلت كل قاعدة بامثلة للتمرين متنوعة على اختلاف الصور والاشكال

٥ً ابنت فيه لدى مناسبة البحث صور استخراج اكثر القواعد الحسابية وبراهينها * موضحاً ما لم يسبق ذكره منها في غيره كاستهلاك الدين * او الاتيانُ بصورته كبرهان الخطأين * كل ذلك مما عنيت بهِ تتمة للفائدة وبالله الهداية والتوفيق

الباب الاول

في الجبر وموضوعه واصطلاحاته

١ الجبر علمٌ يبحث عن الوصول الى الكميات المجهولة بالكميات المعلومة على صورة عامة بواسطة الحروف والاشارات والاعداد

٢ الكمّ او المقدار هو ما يقبل الزيادة او النقصان حقيقةً اوعقلاً كالعدد والوزن والوقت الخ نحو ، ذراعان ، خمسون اقة ، الف غرش

المقادير المتشابهة هي ما كانت من جنس او نوع واحد

المقادير اما معلومة كخمسة رجال واما مجهولة كعدة سنين

في الحروف

٣ تستعمل الحروف الهجائية كلها للدلالة على عدد الكميات او المقادير اما الأُول التي من ا الى ق فللدلالة على الكميات المعلومة غالباً وما بقي من ك الى ي فللدلالة على الكميات المجهولة

قد يراد في مثالٍ واحد الدلالة على مقادير متشابهة . فيستعمل غالباً حرفٌ واحد موسومٌ بعلامات مختلفة . مثاله

ب بَ بً بٍ الخ

او ب ب١ ب٢ ب٣ الخ

ليس للحروف قيمة خاصة في ذاتها بل تختلف قيمة كل منها تبعاً لفرض وشروط المسألة

في الاشارات

(٤) الاشارات الجبرية هي اشكال وضعت لافادة معاني خصوصية في حل العمليات الجبرية

\+ مع

(+) هي اشارة الجمع تقرأ مع وتفيد ضم ما بعدها الى ما قبلها مثاله ٥ + ٦ خمسة مع ستة ٧+ ك سبعة مع كاف . ب + د با مع دال

— الا

(—) هي اشارة الطرح تقرأ الا وتفيد طرح ما بعدها مما قبلها اي تتوسط بين المطروحين فتاتي عن يمين المطروح ويسار المطروح منه مثاله ٧ — ٤ ك — ٨ ل — ب سبعة الا اربعة . كاف الا ثمانية . لام الا باء

تنبيه : كل حرف او عدد لم تسبقه اشارة الجمع او الطرح تقدر عن يمينه اشارة الجمع + نحو ٥ + ك ب + د ٧ + ك
اي + ٥ + ك + ب + د + ٧ + ك

× في

(×) هي اشارة الضرب تقرأ في وتفيد ضرب ما قبلها فيما بعدها او بالعكس نحو ٥ × ٦ ٧ × ك ل × م خمسة في ستة . سبعة في كاف . لام في م . والنقطة (.) بمعنى في ايضاً وتكتب في الاسفل بين المضروبين نحو ٧ . ك ل . م ويندر نحو ٥ . ٦ للالتباس

تنبيه غالباً تقدر اشارة الضرب تماماً بين مضروبين احدهما غير عدد نحو ٥ ك ب ل اي ٥ × ك ب × ل

÷ ــ : على

(÷) هي اشارة القسمة تقرأ على وتفيد قسمة ما قبلها على ما بعدها وتتوسط بين المقسومين فتأتي عن يمين المقسوم عليه ويسار المقسوم نحو ٥ ÷ ٦ د ÷ ل ٢ ك ÷ ٣

($\frac{\infty}{\infty}$) هذا الخط العرضي — هو بمعنى ÷ ايضاً يوضع تحت المقسوم وفوق المقسوم عليه نحو $\frac{٥}{٦}$ $\frac{٨ك}{٢ل}$

(:) تفيد المعنى ذاته او النسبة ايضاً نحو ٥ : ٦ خمسة الى ستة او خمسة على ستة وكذا ٨ : ك   ب : ل

= يعدل او مساوٍ

= هي اشارة المساواة تفيد ان ما قبلها مساوٍ او يعدل ما بعدها نحو ٤ + ٧ = ٩ + ٢   ك + ٥ = ٢ب + د

اي اربعة مع سبعة تساوي تسعة مع اثنين. وكاف مع خمسة تعدل مضاعف با مع دال

≻ اعظم من   ≺ اقل من

≻ اشارة الاعظمية تقرأ اعظم من وتفيد ان ما قبلها اعظم مما بعدها مثاله ٧ ≻ ٥ سبعة اعظم من خمسة ك ≻ ب كاف اعظم من با

≺ اشارة الاصغرية تقرأ اقل او اصغر من وتفيد ان ما قبلها اقل او اصغر مما بعدها نحو ٥ ≺ ٧ خمسة اصغر من سبعة ب ≺ ك با اقل من كاف

تنبيه : كلتا الاشارتين تفيدان عدم المساواة او الترجيح والاعظم او المرجح يكتب داخل الزاوية في كليهما

$\overline{٣ + ب + ك}$ ٥ − (ك + ل)

(٠٠ + ٠٠) اشارة الحصر تفيد حصراً وتقييد كما بداخلها بما يسبقها ويتبعها من الاشارات نحو ٥ − (ك + ل) وتقرأ خمسة الا كمية كاف مع لام اي ان كلا من كاف ولام مطروح من خمسة

$\overline{٠٠ + ٠٠}$ خط عرضي فوق عدة كميات يفيد الحصر ايضاً $\overline{٣ + ب + ك}$

ونقرأ ثلاثة مع كمية ب + ك

[ب + (د — ن)]

[ ] اشارة الحصر ايضاً واستعمالها على الغالب لحصر كمية او اكثر مع كميات محصورة ايضاً نحو ٤ [٥ — (ك + ل)]

اي ان كمية ك + ل مطروحة من ٥ وكل من ٥ وكمية (ك + ل) مضروب في اربعة ونقرأ اربعة (في) كمية خمسة الا كمية كاف مع لام

تنبيه ينبغي دائماً التمييز بين اشارة الكميات المنحصرة واشارة الجزء الاول منها مثاله

ب + (٥ + ن) اشارة الكمية + واشارة الحد الاول ٥ +
د — (٨ + ب) « « « — « « « ٨ +
م — (— د + ه) « « « — « « « د —

$٦^{٢}$ $ب^{٣}$ $(ب+ك)^{ن}_{د}$

دليل القوة او الدليل يكتب بشكل صغير فوق الكمية عن يسارها وهو يدل على عدة المرار المطلوب تكرار الكمية بقدرها مضروبة في نفسها مثاله

$٦^{٢}$ اي ٦ X ٦ مرتين $ب^{٣}$ اي ب X ب X ب ثلث مرار

$(ب + ك)^{ن}$ اي (ب + ك) X (ب + ك) X (ب + ك) الخ مرارًا تساوي ن

القوة : — حاصل ضرب كمية في نفسها مثال

$٦^{٢}$: القوة الثانية او المالية من ٦

$ب^{٣}$: « الثالثة او الكعبية من ب

$(ب+ك)^{ن}$ « النونية من ب + ك

تنبيه كل كمية بدون دليل يقدر دليلها واحد ابدًا مثاله

ب اي $ب^{١}$ (ك — ل) اي $(ك^{١} — ل^{١})^{١}$

جذر

($\sqrt{}$) هي اشارة الجذر توضع فوق الكمية المطلوب اخذ جذرها
جذر كمية هو كمية اخرى اذا ضربت في نفسها حصلت تلك الكمية
مثاله جذر ٦٤ هو ٢ او ٤ او ٨

($\sqrt[3]{64}$) ما يكتب بشكل صغير عن يمين اشارة الجذر هو دليل
الجذر وهو ما دل على كم مرة ينبغي ان تتعدد كمية اخرى لتحصل الكمية
المفروضة مثاله $\sqrt[3]{64}$ هو ٤ والدليل ٣ لان ٤ × ٤ × ٤ = ٦٤

اما دليل الجذر المالي فيقدر ابدًا مثاله $\sqrt{4}$ اي $\sqrt[2]{4}$ فالدليل ٢
وهكذا $\sqrt{ب}$ الجذر المالي من با $\sqrt{ك - د}$ الجذر المالي من كاف الا دال
$\sqrt[5]{ل}$ الجذر الخامس من لام مال $\sqrt[ن]{ب + س}$ الجذر النوني من (ب+س)

في الاعداد

٥ الاعداد اما ايجابية او سلبية او ملتبسة ومثلها الحروف
العدد الايجابي هو ما تقدمته + اشارة الجمع او الايجاب نحو ٥ اي + ٥
العدد السلبي هو ما تقدمته — اشارة الطرح او النفي او السلب نحو — ٥
العدد الملتبس هو ما سبقته الاشارتان معًا نحو ± ٥ مع او الا خمسة

٦ تحصل الاعداد السلبية من طرح عدد من اخر اصغر منه مثاله
٨ — ١١ فهذا الطرح اي طرح الاكبر من الاصغر غير مستعمل عادة
في الحساب انما في الجبر يدل على طرحه بواسطة الاشارات هكذا

٨ — ٨ — ٣ او — ٣ وهو الباقي الجبري

٧ لنا من ذلك هذه القاعدة لطرح عدد او مقدار من اخر اصغر منه
اطرح الاصغر من الاكبر وضع عن يمين الباقي اشارة الاكبر

٨ كل عدد سلبي له قيمتان احداها مطلقة والاخرى اضافية

القيمة المطلقة هي قيمة العدد بصرف النظر عن الاشارة والاضافية هي قيمة العدد باعتبار الاشارة مثاله — ٦ قيمته المطلقة ٦ والاضافية — ٦

٩ قيمة الاعداد السلبية الاعتبارية · — من ٧ لو طرحنا ٤ ، ٥ ، ٦ وهكذا على التوالي لكانت البواقي

٣ ٢ ١ ٠ —١ —٢ —٣ الخ

ومن المعلوم في الحساب انهُ كلما زاد المطروح قل الباقي فالاعداد السلبية ١َ اصغر من صفر ٢َ قيمتها السلبية اصغر منه بمقدار ما تزيده قيمتها الايجابية ٣َ الاكبر بين عددين سلبيين هو اصغرهما

اي — ٥ < ٠ ٢َ — ٥ < ٠ بمقدار ما ٥ < ٠

٣َ — ٦ — < — ٢ و — ٥ — < — ١٣

١٠ الصفر واللاشي · — الصفر جبرياً لا يفيد الفنا او العدم الذي ليس شي دونه بل هو وسط بين سلسلة اعداد غير متناهية · متساوية ولكنها متقابلة في المعنى مثاله

رجل اراد السفر شرقاً غير انه ضل وسار غرباً ٤٠٠ متر فيعبر عن المسافة التي قطعها بـ — ٤٠٠ فهذه لا يراد بها مسافة اقل من لا شي بل مسافة اقل من صفر · قدرها ٤٠٠ متراً في الجهة المقابلة

في العبارات الجبرية وقيمتها العددية

١١ العبارة او الكمية الجبرية هي كل كمية حوت حرفاً او اكثر مثاله

ك   ٥ ب د   ٣ ك + ٢ ب — ل   ٦ (ك — ل + م) / √(د — ن)

١٢ العبارات الجبرية اما جذرية وهي ما كان على احد احرفها اشارة الجذر واما غير جذرية وهي ما خلت حروفها من تلك الاشارة مثاله

(٤ ك ل + ٥ س √٢) / ٧ ب د   ٣ ل ه √(كَ + ٢ بَ)

١٣ العبارات الجبرية اما تامة وهي ما خلت من مقسوم عليه حرفي نحو ك + ل واما كسرية او غير صحيحة وهي ما تضمنت مقسوما عليه حرفيًا نحو $\frac{ك + ل}{٥ د}$

١٤ العبارات الجبرية اما بسيطة اي ذات حد واحد وهي ما لم ترتبط اجزاؤها بعلامة الجمع او الطرح مثاله

٤ ك^{٢} د^{٢} هـ ‏ ‏ ٥ ب د س ‏ ‏ $\frac{ب^{٢}}{٣ ك}$

واما مركبة اي ذات حدود كثيرة وهي ما ارتبطت اجزاؤها بعلامة الجمع او الطرح مثاله ٣ ك + ب^{٢} د — ٥ ب د^{٢} — ٣ ن

وهي ذات اربعة حدود : ٣ ك ‏ ب^{٢} د ‏ — ٥ ب د^{٢} ‏ — ٣ ن

اي ان كل اشارة تتبع الحد المتقدمة عليه

تسمى العبارة او الكمية الجبرية ثنائية نحو ب + ل او ثلاثية نحو د — هـ + ٥ او رباعية الخ تبعًا لعدد حدودها

١٥ درجة الحد . تقدر درجة الحد بقدر مجموع دلائل حروفه مثاله ٣ ك د^{٣} ‏ ٦ م ن^{٤}

درجة الحد الاول رابعة ودرجة الثاني خامسة

١٦ الحدود المتجانسة . — اذا كانت كل الحدود من درجة واحدة قيل لها متجانسة مثاله ٣ د ب^{٢} — د^{٢} ب + د^{٣}

العبارة المتجانسة الحدود . — هي ما كانت كل حدودها متجانسة مثاله م ن^{٤} — م^{٢} ن^{٣} + ٥ م^{٣} ن^{٢} — م^{٤} ن — م^{٥}

١٧ الحدود اما متشابهة واما غير متشابهة

الحدود المتشابهة هي ما تساوت حروفها ودلائل قواتها وجذورها مثاله ٥ ب ك^{٢} + ٣ ب ك^{٢} — ٢ ب ك^{٢} و ٤ ^{٢}$\sqrt[٦]{د^{٢}}$ — ٢ ^{٢}$\sqrt[٦]{د^{٢}}$

الحدود الغير المتشابهة ·— هي ما اختلفت حروفها او دلائلها

مثاله   ب + ٢ ك + ٣ ك^{٢} + ٢ ب^{٢} + ^{٢}ك

١٨ المسمى ·— مسمى حد او كمية هو ما كان مضروباً فيه من عدد او حرف مثاله ٢ ب ل · — ٥ ك   (ب + ﻫ) س

مسمى ل هو ٢ ب مسمى ك هو — ٥ ومسمى س هو (ب + ﻫ)

اذا لم يكن للكمية مسمى يقدر مسماها واحداً مثاله

ب   — د   (ب — ﻫ)

اي   ١ ب   — ١ د   ١ (١ ب — ١ ﻫ)

ملاحظة : ينبغي عدم ملابسة المسمى بالدليل فالاول يكتب عن يمين او مع الكمية ويدل على كم مرة تكررت والثاني يكتب فوقها ويدل على كم مرة ضربت في ذاتها مثال

٤ ك = ك + ك + ك + ك

ك^{٤} = ك × ك × ك × ك

١٩ مكفوء كمية او عبارة جبرية ·— هو الخارج من قسمة واحد عليها مثاله مكفوء   ٥   ب   د — ل هو $\frac{١}{٥}$ $\frac{١}{ب}$ $\frac{١}{د - ل}$

٢٠ القيمة العددية لحد واحد ·— هي القيمة الناتجة بعد التعويض عن كل حرف بقيمته المفروضة واجراء العمليات اللازمة عليها حسب الاشارات مثاله   ٣ ك د^{٢} س^{٣}ن

لتكن ك = ٥   د = ٢   س = ٣   ن = ٤

بالتعويض   ٣ × ٥ × ٢^{٢} × ٣ × ٤^{٣}

او   ٣ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ = ٣٦٠

٢١ القيمة العددية لعبارة جبرية ·— هي القيمة الناتجة بعد جمع قيمات الحدود الايجابية وقيمات الحدود السلبية وطرحها من بعضها مثاله

٣ ك^{٢} ب — ٢ د ك + ٥ ك^{٢} — ٦ د^{٢} ك + ك^{٢}

لنكن ك = ٤ ب = ٣ د = ٢

بالتعويض ١٤٤ — ١٦ + ٣٢٠ — ٩٦ + ١٦

وقيمتها العددية (١٤٤ + ٣٢٠ + ١٦) — (١٦ + ٩٦) = ٣٦٨

ملاحظة : يمكن اذن تغيير موضع اي حد كان من عبارة جبرية دون تغيير قيمتها العددية لان ذلك لا يغير بقيمة الحدود الايجابية ولا السلبية فبالمثال المذكور لو طرحنا ١٦ من ١٤٤ وجمعنا ثم الباقي ١٢٨ + ٣٢٠ ثم طرحنا ٩٦ من المجموع ٤٤٨ ثم جمعنا ١٦ الى الباقي ٣٥٢ لنتجت القيمة العددية ذاتها ٣٦٨

٢٢ القيمة السلبية لعبارة جبرية ٠— قد يحدث ان مجموع القيمات الايجابية اقل من مجموع القيمات المنفية فتكون القيمة العددية سلبية مثاله

ك + ل — د — ن

لنكن ك = ٥ ل = ٣ د = ٤ ن = ٧

فالنتيجة ٥ + ٣ — ٤ — ٧ اي — ٣

٢٣ العبارات الجبرية المتعادلة ٠— اذا عوضنا عن حروف عبارتين بقيمة واحدة فيهما وتساوت قيمتاهما كانتا متعادلتين مثلاً ك + ل = ٤ (ك — ل) بموجب الفرض بالمثال السابق

في مميزات الجبر عن الحساب

من مميزات الجبر عن الحساب استخدام الحروف عوض الاعداد ١ً للاختصار ٢ً لحل المسائل بصورة عامة

في استخدام الحروف والاشارات للاختصار

٢٤ كل عبارة جبرية لها مفهوم خصوصي يتبع اشاراتها وفرض حروفها لان المراد منها الاختصار في التعبير وتسهيل العمل اذ نتصرف بالمجهول كالمعلوم ولبيان ذلك نورد حل مسألة حسابية وصورة كتابتها

بالاختصار الجبري

اقسم ١٨٥ الى ثلثة اقسام يزيد ثانيها ٢٥ عن الاول وثالثها ١٥ عن الثاني

الحل الحسابي	الحل الجبري
الاول مجهول	ك
الثاني يساوي الاول و٢٥	ك + ٢٥
الثالث يساوي { الثاني و١٥ او	
الاول و٢٥ و١٥ او	
الاول و٤٠ }	ك + ٤٠
فالاول والاول و٢٥ والاول و٤٠	
اي ثلثة اضعاف الاول و٦٥ يبلغ ١٨٥	٣ ك + ٦٥ = ١٨٥
فلو طرح ٦٥ من المجموع لكان الباقي	
ثلثة اضعاف الاول	٣ ك = ١٨٥ — ٦٥ = ١٢٠
فالاول ثلث الباقي ١٢٠	ك = ١٢٠/٣ = ٤٠

والثاني ٦٥ والثالث ١٠٥

ليكن ٣ (ك + ٢) — ٥ = ١٢٤ وليفرض ك ثمن ساعة مثلاً فمفهوم العبارة انهُ لو زيد على الثمن ٢ وضرب المجموع في ٣ ثم طرح من الحاصل ٥ لكان الباقي ١٢٤

على التلميذ ان يتفهم معنى العبارة من مجرد النظر اليها مثال

ك + ٦ — ½ ك + ٩ = ٤٥

ليكن ك عدداً مجهولاً فما هو مفهومها الجواب عدد اضيف اليه ستة وطرح من المجموع نصف العدد ثم اضيف الى الباقي ٩ فكان المجموع ٤٥

تمرين

ما هو مفهوم ما يأتي من العبارات بفرض الحروف اعداداً او غير ذلك

(١) ٣ (ك + ٤) = ٢ ك — ٥ (٢) ٥ ل — ١٢ + ٨ ل = ٤٢٠

(٣) ٦ + ٣ (هـ — ٢) = ١٠٨ (٤) ٩ — (ك — ٢)/٢ = ٤٥

(٥) ٤ [٨ — (ك — ٤)] = ١٦٢ (٦) م^٢ + ١٢ — ١/٢ م = ٧

(٧) ن^٢ — ١٣ + ١/٢ ن = ٤٦ (٨) ٤ ي^٢ — ٢^٢ ي = ٦٠

والد عمره ك وعمر ابنه ل فكيف تكتب ثلثة اضعاف عمر الابن تساوي عمر الاب

كيف تكتب بعبارة جبرية : رجل راس ماله س اضاف اليه ٢٠٠٠ فصار مضاعف ما كان

في استخدام الحروف لحل المسائل بصورة عامة

٢٥ حل مسألة بصورة عامة هو حلها حلاً حرفياً بنوع ينطبق على سائر المسائل من نوعها

٢٦ الدستور : هو العبارة الجبرية التي تدل على نتيجة حل المسألة الحرفي

مثال عددان مجموعها ١٦ وفضلتهما ١٢ فما هما

نحل هذه المسألة حلاً حرفياً اي نفرض الاول س والثاني ي ومجموعهما ب وفضلتهما د

فيكون س + ي = ب

س — ي = د

بالجمع س + س + ي — ي = ب + د

اي ٢ س = ب + د

او س = (ب + د)/٢

هذه العبارة هي دستور كل المسائل من هذا النوع

ولمعرفة اكبر العددين علينا ان نستخرج قيمة (ب + د)/٢ العددية

اذن الاول $\frac{١٦ + ١٢}{٢}$ = ١٤ والثاني ٢

ولو فرض المجموع ٢٠ والفضلة ٨

يكون الاول $\frac{٢٠ + ٨}{٢}$ = ١٤ والثاني ٦

٢٧ لنا من ذلك هذه القاعدة

«اذا عرفت دستور مسألةٍ وطلب منكُ حل مسألة اخرى من نوعها فاستخرج قيمة الدستور العددية حسب فرض المسألة»

في دساتير متنوعة

يطلب حل مسائل حسابية عليها

دستور الفائدة البسيطة ف = $\frac{ر ع ن}{١٠٠}$

ليكن ف الفائدة ر رأس المال ع المعدل ن اجل (زمان)

ما هي فائدة مبلغ قدره ٢٥٠٠ غرشاً بمعدل ٤½ بالمئة بمدة سنة ٤ شهر ٣

ف = $\frac{٢٥٠٠ \times ٤،٥ \times ٤،٢٥}{١٠٠}$ = ٤٧٨ ٠ ٥ باره

ما هي فائدة ١٥٢٠ غرشاً في سنة ١ شهر ٦ بمعدل ٧ بالمئة

ما هي فائدة ٣٠٠٠ غرشاً في سنة ٣ شهر ٤ يوم ١٥ بمعدل ٥½ بالمئة

ما هي فائدة ٤٢٧١،٥ غرشاً في سنة ٢ شهر ١ يوم ١٥ بمعدل ٦½ بالمئة

دستور راس المال ر = $\frac{١٠٠ ف}{ع ن}$

مال بلغت فائدته ٥٠٠ غرشاً في سنة ٣ شهر ٢ بمعدل ½ شهرياً بالمئة فكم كان

اي مال تبلغ فائدته ٦٣١٢ غرشاً في سنة ٤ شهر ٦ بمعدل ١ شهرياً بالمئة

دستور الاجل $\text{ن} = \frac{\text{١٠٠ ف}}{\text{ر ع}}$

مبلغ قدره ٣٥٢٥ غرشاً بلغت فائدته بالمئة ٦ سنوياً ٤٠٧ فكم الاجل

ما هو الاجل اللازم ليضاعف مبلغ قيمته ٣٠٠٠ بمعدل $\frac{1}{2}$١٢ سنوياً

دستور المعدل $\text{ع} = \frac{\text{١٠٠ ف}}{\text{ر ن}}$

مبلغ قدره ٤٥٠٠ غرشاً بلغت فائدته في ١٦ يوماً ١٢ فكم كان المعدل

راسمال قدره ٦٠٠٠ غرشاً فائدته ٧٤٢٫٥ غرشاً في سنة ٢ شهر ٣ فكم كان المعدل

الفائدة المركبة

ليكن م مجموع المبلغ مع فائدته المركبة وهذا دستوره

$$\text{م} = \text{ر} \left(\text{١} + \text{ع}\right)^{\text{ن}}$$

كم يبلغ مال قدره ٦٠٠٠ غرشاً مع فائدته المركبة بالمئة ٤٫٥ في سنة ٣

٨٠٠٠ غرشاً كم تصير مع فائدتها المركبة بالمئة ٧ في سنة ٣

دستور رأس المال $\text{ر} = \frac{\text{م}}{\left(\text{١} + \text{ع}\right)^{\text{ن}}}$

مال بلغ مع فائدته المركبة بالمئة ٥ سنوياً ٨٠٠٠ غرشاً في سنة ٣ فكم كان

ما هو اصل مال بلغ مع فائدته المركبة ٥١٨٤ غرشاً في ثلث سنوات بالمئة ٢٠ سنوياً

دستور المعدل $\text{ع} = \sqrt[\text{ن}]{\frac{\text{م}}{\text{ر}}} - \text{١}$

٣٠٠٠ غرشاً بلغت مع فائدتها ٥١٨٤ غرشاً في ٣ سنوات فكم كان المعدل السنوي

٤٥٧٥ ؟ بلغت ٦٨٠٠ بعد ٩ سنين فكم كان المعدل

دستور الاجل $(\text{ع} + ١)^{\text{ن}} = \frac{\text{م}}{\text{ر}}$

(تنبيه) انظر كم مرة يلزم ان ترقي (ع + ١) حتى تساوي $\frac{\text{م}}{\text{ر}}$

ما هو الاجل اللازم لتبلغ ١٥٥٠ غرشاً ٢٢٩٠ بالمئة ٥ (سنوياً)

دستور الخطأين

ليكن ج الجواب و ف المفروض الاول و فَ المفروض الثاني و د المعلوم وكمية ص صورة منطوق المسألة او كيفية العمل

$$\text{ج} = \frac{\text{فَ}\,\overline{(\text{ص ف} - \text{د})} - \text{ف}\,\overline{(\text{ص فَ} - \text{د})}}{(\text{ص ف} - \text{د}) - (\text{ص فَ} - \text{د})}$$

اي عدد ضرب في ٥ وجمع اليه ٤ فكان المجموع ٦٤

ليكن المفروضان ١٦ ، ١٤

$$\text{ج} = \frac{١٤\,\overline{(٥ \times ١٦ + ٤ - ٦٤)} - ١٦\,\overline{(٥ \times ١٤ + ٤ - ٦٤)}}{(٥ \times ١٦ + ٤ - ٦٤) - (٥ \times ١٤ + ٤ - ٦٤)}$$

$$\text{اي ج} = \frac{١٤ \times ٢٠ - ١٦ \times ١٠}{٢٠ - ١٠} = ١٢$$

ملاحظة : (ص ف — د) هو الخطأ الاول و (ص فَ — د) الخطأ الثاني و فَ (ص ف — د) المحفوظ الاول ف (ص فَ — د) المحفوظ الثاني

(١) اي عدد ضرب في ٨ وقسم على ٢ كان الخارج ٦٠ ص = $\frac{٨}{٢}$

(٢) اي عدد اذا قسم على ٣ وطرح ربعه من الخارج بقي ١ ص = $\frac{١}{\ } - \frac{١}{٤}$

تنبيه : في دساتير الفائدة حول الاجل الى المسمى المفروض معدله كما رأيت في المثال وكل مسألة لم يقيد بها المعدل فهو سنوي

خذ قيمة ما يأتي وافرض ب = ٢   د = ١   س = ٣   ل = ٤

(١) ل + ب — س   (٢) د^{٢} + ل^{٢} — س

(٣) ١٥ ل + ٧ ب + س — د   (٤) ب^{٢} — س^{٢} + ٣ (د + ٢)

(٥) ١٥ ل^{٢} + ٧ ب^{٢} — (س^{٢} — د)   (٦) ١٥ ل — ٧ ب (س — د)

افرض = ٣   د = ١٠   ك = ٧

(٧) ٣د / ب + ٢ ك — د ب ك / ٢١ د   (٨) ٢ د + ٤ ب / ٣ك — (د — ب) — د — ٢ب / ك — ب

افرض ب = ٩   د = ١   س = ٨

(٩) ٨ د ب^{٢} / ٣ س — ٩ د س / ٢ ب س   (١٠) (٢√دب + ٢√د^{٢}ب) / (٢√ب — ٢√س)

(١١) ٢√د س + ٢ (٢√٤ب — ٢ ٢√س)   (١٢) ٢√ب + س — د — ٢√٩ ب^{٢}

(١٣) ب ٢√٢ س — ٧ د   (١٤) ب ٢√٤ (د + س) — ٢√٨ س (ب — د)

(١٥) ٨ [ب (س + ٢د) — د (ب — س + ٢√٢ (ب + د + س))]

افرض م = (ب + د + ه) / ٢   ب = ١٨   د = ١٢   ه = ١٠

(١٦) ٢√م (م — ب) (م — د) (م — ه)

في الاوليات التعليمية ونتائجها

٢٨ تستند العلوم التعليمية جميعها الى اوليات اي قضايا عقلية واضحة من ذاتها ولذلك توضع المسائل الجبرية غالباً بصورة مساواة بين كميتين او اكثر ويجري من ثم حلها استناداً على الاوليات الاتية ونتائجها :

(١) الاشياء المتساوية لشيء واحد هي متساوية بعضها لبعض

نتيجة اذا ساوى طرف معادلة طرف معادلة اخرى فالطرفان الباقيان قيمتهما متساوية ايضاً

مثال ٥ + ٤ = ٧ + ٢ ، ٥ + ٤ = ٦ + ٣ اذن ٧ + ٢ = ٦ + ٣

كذا ك + م = ٩ ، ك + م = ل اذن

(٢) اذا اضيفت كمية الى اخرى ثم طرحت منها فالثانية لاتتغير

اضف ٦ الى ٨ ثم اطرح ٦ من ١٤ فيبق ٨

اي ٨ + ٦ − ٦ = ٨ ب + د − د = ب

(٣) اذا اضيفت مقادير متساوية الى مقادير متساوية تكون المجموعات متساوية

مثاله ٥ + ٦ = ٩ + ٢

٤ + ١ = ٣ + ٢

اذاً ٥ + ٦ + ٤ + ١ = ٩ + ٢ + ٣ + ٢

نتيجة : اذا اردت نقل حدٍ من طرف الى اخر فلك ان تنقله بعكس اشارته دون تغيير في المساواة

مثلاً : ك — ٨ = ١٢ اجمع ٨ الى الطرفين

ك + ٨ — ٨ = ١٢ + ٨

او ك = ١٢ + ٨

فترى ان — ٨ في الطرف الاول نقلت الى الطرف الثاني ٨ دون اخلال في المعادلة و بالعكس وهذا النقل يسمى المقابلة

(٤) اذا طرحت مقادير متساوية من مقادير متساوية تكون البقايا متساوية

مثلاً ك + ٦ = ١٢ بطرح ٦ من الجانبين

ك = ١٢ — ٦ ولنا منها ذات النتيجة

(٥) اذا ضربت مقادير متساوية في مقادير متساوية تكون الحواصل متساوية

مثلاً $\frac{٦}{٣}$ = ٢ بضرب الطرفين في ٣

٦ = ٢ × ٣

نتيجة : اذا حول طرفا معادلة الى مخرج مشترك فيسقط منهما دون تغيير قيمتها وذلك كضربهما فيه

مثاله $\frac{ك}{٦} = \frac{٢}{٣}$ (١) حول الطرف الثاني الى مخرج ٦

$\frac{ك}{٦} = \frac{٤}{٦}$ (٢) ولو ضرب الطرفان في ٦

لكان ك = ٤ لذلك يستغنى عن كتابة المعادلة الثانية

(٦) اذا قسمت مقادير متساوية على مقادير متساوية تكون الخوارج متساوية

مثاله $٥ \times ك = ٥ \times ٨$

اقسم على ٥ $ك = ٨$

نتيجة اذا كان المجهول مضروبا فاقسم مساوي حاصله على مسماه فتخرج قيمته كما مر بك في المثال

(٢٩) لنا من هاته الاوليات ونتائجها القواعد الاتية وسيأتي ذكرها بالتفصيل مع كلما يتعلق بها من الملاحظات

قابل اي انقل المعلوم الى طرف والمجهول الى اخر بتبديل الاشارات

اجبر اي حول الى مخرج مشترك المعادلة الكسرية ثم اسقطه

اقسم المعلوم على مسمى المجهول فتخرج قيمته

مثال : $\frac{٣ك}{٥} - ٢ = ١$

بالمقابلة $\frac{٣ك}{٥} = ٢ + ١ = ٣$

اجبر $٣ ك = ١٥$

اقسم على المسمى ٣ $ك = ٥$

مثال اخر $\frac{٢ك}{٣} - ٨ + \frac{٣}{٢} = ١٤$

قابل $\frac{٢ك}{٣} = ٢٢ - \frac{٣}{٢}$

اجبر $٤ ك = ١٣٢ - ٩ = ١٢٣$

اقسم على المسمى ٤ $ك = \frac{١٢٣}{٤} = ٣٠ \frac{٣}{٤}$

تمرين

حل المعادلات العددية $\frac{٣ك}{٤} - ٨ = ٥ + \frac{٢}{٣}$

$\frac{٥ك}{٧} - ١٢ = ٨$

$٣ ك + ٥ - ١٢ = ٨$

$\frac{ك}{٣} + ٦ - \frac{٥}{٧} = ٣$

الباب الثاني

في الاصلاح والاعمال الاربعة

الفصل الاول

في الاصلاح

الاصلاح تحويل الحدود المتشابهة الى حد واحد دون تغيير في قيمتها .

اصلاح الحدود المتفقة الاشارة :

(٣٠) اذا اتفقت الحدود المتشابهة في الاشارة فاجمع مسميات الكمية المشتركة وضع المجموع عن يمينها مع تلك الاشارة

مثاله

٥ ل	— ١١ د^٥ هـ^٥	(ب + د)^٢	— √[٢](٣ هـ)
٣ ل	— ٤ د^٥ هـ^٥	٣ (ب + د)^٢	— ٢ √[٢](٣ هـ)
٢ ل	— ٣ د^٥ هـ^٥	٥ (ب + د)^٢	— ٤ √[٢](٣ هـ)
١٠ ل	— ١٨ د^٥ هـ^٥	٩ (ب + د)^٢	— ٧ √[٢](٣ هـ)

٣ ب د ى — ن ك + ب^٢ — ٣ ل^٢ هـ^٢ + √[٥](٢ د) — √[٢](٢ د)

٥ ب د ى — ٣ ن ك + ٢ ب^٢ — ٧ ل^٢ هـ^٢ + ٥ √[٥](٢ د) — ٤ √[٢](٢ د)

٨ ب د ى — ١٠ ن ك + ٥ ب^٢ — ٤ ل^٢ هـ^٢ + ٦ √[٥](٢ د) — ٣ √[٢](٢ د)

---

١٦ ب د ى — ١٤ ن ك + ٨ ب^٢ — ١٤ ل^٢ هـ^٢ + ١٢ √[٥](٢ د) — ٨ √[٢](٢ د)

اصلاح الحدود المختلفة الاشارة :

(٣١) اجمع مسميات الكمية المشتركة الايجابية على حدة والسلبية مثلها ثم اطرح المجموع الاصغر من الاكبر وضع الباقي مع اشارة الاكبر عن يمين الكمية المشتركة

١٥ د^{٢}هـ^{٢} + ٢ ب ن − م د ل + ٨

− ٤ د^{٢}هـ^{٢} + ٣ ب ن + ٣ م د ل − ٦

− ١٢ د^{٢}هـ^{٢} − ٧ ب ن − م د ل + ٣

− د^{٢}هـ^{٢} − ٢ ب ن + م د ل + ٥

٨ م^{٢}	٧ د^{٢}ل	٥ ك	٥ (ب − هـ)^{٢}
٤ م^{٢}	− ٤ د^{٢}ل	− ٣ ك	− ٦ (ب − هـ)^{٢}
− ٢ م^{٢}	+ ٨ د^{٢}ل	− ٤ ك	٤ (ب − هـ)^{٢}
− ٣ م^{٢}	− ١٢ د^{٢}ل		٣ (ب − هـ)^{٢}
٧ م^{٢}			

(٣٢) الكمية الايجابية تنفي الكمية السلبية المساوية لها وبالعكس (اوليه ٢)

ب + د − د = ب   د − ٢ + ٢ = د

وهكذا متى ساوت مسميات الكميات الايجابية مسميات الكميات السلبية المشابهة لها

مثاله   ٤ د + ٥ م ن − ٣ ل^{٢} + ٤ (ب − د^{٢})

− ٣ د + ٣ م ن + ٥ ل^{٢} − ٣ (ب − د^{٢})

− د − ٨ م ن + ل^{٢} − (ب − د^{٢})

...   ...   ٣ ل^{٢} ....

تنبيه اذا كان مجموع المسميات اكثر من حد واحد يربط باداة

الحصر مع الكمية المشتركة

٥ ب ل + ٣ ل = (٥ ب + ٣) ل

٢ د^{٢} — ٣ ب د^{٢} = (٢ — ٣ ب) د^{٢}

٤ س د + ٨ ف — ٣ ل^{٢}

٢ ب س د + ب ف + ب ل^{٢}

— ب س د + ٦ ف — ٢ ل^{٢}

(٤ + ب) س د + (١٤ + ب) ف + (ب — ٥) ل^{٢}

تمرين

اصلح ٣ ك^{٢} ب^{٢} + ٥ ك^{٢} ب^{٢} — ٧ ك^{٢} ب^{٢} + ل ك^{٢} ب^{٢}

(٢) ٥ د م^{٢} — ٦ ل^{٢} + ٤ ل^{٢} — ٢ د م^{٢} — ٦ د م^{٢} + ٧ ل^{٢}

(٣) ٤ ط^{٤} م^{٢} + ٣ ط^{٤} م^{٢} — ٨ ط^{٤} م^{٢} + ٥ ط^{٤} م^{٢}

(٤) ٧ د ك — ٥ د ك + ٢ د ك — ه^{٢} س^{٢} + ٣ ه^{٢} س^{٢} — ٢ ه^{٢} س^{٢}

(٥) ٢ ب^{٢} — ٣ ه ن + ٣ ب^{٢} + ٥ ه ن — ب^{٢} — ٢ ه ن

(٦) ٢ ب س + ٨ س — ٦ س — ب س

(٧) (ب^{٢} — ه) — ٥ (ب^{٢} — ه) + ١٣ (ب^{٢} — ه)

الفصل الثاني

في الجمع

(٣٣) الجمع رد عبارات جبرية الى واحدة قيمتها العددية تساوي مجموع قيمات الاولى العددية مثاله مجموع

ب و ك هو ب + ك فلو كانت ب = ٥ ك = ٣

لكان المجموع ٥ + ٣ = ٨ ولو كانت ك = — ٦ لكان المجموع ٥ — ٦ = — ١

(٣٤) قاعدة: تجمع العبارات او الكميات الجبرية بربطها مع بعضها بالعلامات الاصلية واصلاحها ان امكن

مثال : اجمع ك و — ٢ و ٣ م و — ن

المجموع ك — ٢ + ٣ م — ن

اجمع ٢ ب و ٣ ل و ٥ ب — ٦ ل

المجموع ٢ ب + ٣ ل + ٥ ب — ٦ ل = ٧ ب — ٣ ل

تنبيه : يسهل الاصلاح بكتابة الحدود المتشابهة تحت بعضها

مثاله : $ك^{٢}$ — ٢ ك + $م^{٢}$ ‏ ٨ — ب ك + ٢ $ل^{٢}$

٣ $ك^{٢}$ — ٦ ك + ٢ $م^{٢}$ ‏ ٦ — ٢ ك — ٦ $ل^{٢}$

٢ $ك^{٢}$ + ٤ ك — $م^{٢}$ ‏ — ٤ — ٥ ك + ٤ $ل^{٢}$

---

٦ $ك^{٢}$ — ٤ ك + ٢ $م^{٢}$ ‏ ١٠ — (ب + ٧) ك

ملاحظة ١ : ٥ + ٢ ك + م + (٨ — ك + ٣ م) =

٥ + ٢ ك + م + ٨ — ك + ٣ م

فالكميات المحصورة باشارة الجمع تفك بابقائها واشاراتها كما هي وبالعكس تحصر عدة كميات باشارة الجمع دون تغيير باشاراتها الاصلية

ملاحظة ٢ : ٨ ك و — ٦ ك = ٨ ك — ٦ ك = ٢ ك

فالمجموع الحسابي اعظم من الاعداد المجموعة اما الجبري يكثر او يقل باعتبار القيمة الحقيقية المجموعة فلا يفيد الزيادة دائماً

ملاحظة ٣ مجموع ب + د و ب — د = ٢ ب

فمجتمع كميتين مع فضلتهما يساوي مضاعف اكبرهما

مثال اخر : مجتمع ٤ $ب^{٢}$ — ٢ هـ و ٤ $ب^{٢}$ + ٢ هـ = ٨ $ب^{٢}$

اجمع

امثلة للعمل

(١) ٣ ك + ٥ ب — ٤ د الى ٦ ك — ٧ ب الى — ٤ ك + ٢ ب + د

(٢) ٣ $ك^{٢}$ د — ٢ $ب^{٢}$ الى ٤ $ك^{٢}$ د — ٥ $ب^{٢}$ — ٢ $ك^{٢}$ د الى ٤ $ب^{٢}$ — م

(٣) ٣ س $ى^{٢}$ — ٢ $س^{٢}$ $ى^{٢}$ و — ٢ $س^{٢}$ $ى^{٢}$ + ٤ $س^{٢}$ $ى^{٢}$ — $ى^{٢}$ و ٤ $س^{٢}$ $ى^{٢}$ — ٣ $س^{٢}$ $ى^{٢}$ + ٢ $ى^{٢}$

استعلم قيمة المجموع العددية بفرض س = ٤ ى = ٢

(٤) اجمع ٥ د^{٢}ب^{٢} — ٢ د^{٢}ب^{٢} + د ب^{٣} الى — ٤ د^{٢}ب^{٢} + ٥ د^{٢}ب^{٢} — ٣ د ب^{٣} الى ٣ د^{٢}ب^{٢} — ٦ د^{٢}ب^{٢}

ما هي القيمة العددية بفرض د = ٣ ب = ٢

(٥) √م^{٢} الى ٣√م^{٢} — ٢√م^{٢} و — ٥√م + ٦√م^{٢} و ٢√م — ٤√م^{٢}

اجمع ٨ ك^{٢}ى^{٢} — ٣ ك ى^{٣} + ٥ ك^{٢}ى^{٢} — ى^{٤} + ٣

(٦) — ٦ ك^{٢}ى^{٢} + ٤ ك ى^{٣} — ٧ ك^{٢}ى^{٢} + ٢ ى^{٤} + ٦ √(م^{٢} ى)

٣ ك^{٢}ى^{٢} — ٥ ك ى^{٣} + ٣ ك^{٢}ى^{٢} — ٣ ى^{٤} — ٧ √(م^{٢} ى)

اجمع ٦ د^{٢}س^{٢} + ٥ د^{٢}س^{٢} — ٤ د س^{٣} + ٨ √هـ^{٢} — ١٦

(٧) ٤ د^{٢}س^{٢} — ٣ د^{٢}س^{٢} + ٦ √هـ^{٢} — ١٥

٢٤ — ٣ د س^{٣} + ٥ د^{٢}س^{٢} — ٤ د^{٢}س^{٢} — ٧ + ٣ √هـ^{٢}

(٨) رجل عنده دراهم تبلغ ٢٠٠٠ غرشٍ وبضاعة قيمتها ٥ ب غرشاً وديون قدرها د — ب غرشاً فكم تبلغ قيمة ما عنده

(٩) ثلثة اعداد متوالية اولها س فما هو مجموعها

(١٠) بستاني استغل من بستانه في السنة الاولى ب غرشاً من ثمن ليمون ود غرشاً من ثمن تفاح ومضاعف ثمن الليمون من ثمن مشمش ومضاعف ثمن التفاح من فواكه اخرى وفي السنة الثانية استغل منها جميعها مقدار ثمن التفاح والليمون في السنة الاولى فكم استغل في السنتين

(١١) دفع خليل ب غرشاً ثمن ثوب خام و ب — ٥ ثمن شيت وقدر مجموعها ثمن جوخ و ٤ ب + ٦ ثمن صوف فكم جملة ما دفع وما هي قيمة ما دفعه اذا كانت ب = ٥٠

(١٢) عدد قدره س اضيف اليه مثله ثم ٢٠ ثم طرح من المجموع ٨ فكم الباقي وكم كان العدد لو فرض الباقي ٣٢

لو اضيف ٨ سنين الى عمر حنا وقدره ى لساوى عمر خليل وهو ٤٥ سنة فكم كان

(١٤) عددان مجتمعها ٨ وفضلتهما ٣ فكم هو مضاعف اكبرها

(١٥) ما هو مجموع $ك^{٢}$ د — ٤ ب $س^{٢}$ و$ك^{٢}$ د + ٤ ب $س^{٢}$

الفصل الثالث

في الطرح

(٣٥) الطرح ايجاد الفرق بين عبارتين

مثاله : اطرح ب من د + ب فالباقي د وذلك بجمعنا — ب اي قيمة مساوية للمطروح ومعاكسة له في الاشارة كما مر نمره ٣٢ فلنا هذه القاعدة

(٣٦) قاعدة : يتم الطرح بابدال اشارة كل حد من المطروح من + الى — او بالعكس وجمعه من ثم الى المطروح منه كما سبق

امثلة تشابهت بها الاشارات والمطروح منه اعظم من المطروح

من	٣٢	١٢ دم	٥ $ك^{٢}$ د	ب س
اطرح	١٥	٤ دم	$ك^{٢}$ د	٣ س
الباقي		٨ دم		(ب — ٣) س
كذا من	—١٧	—٧ ل ن	—١٢ $س^{٢}$ ف	— د م
اطرح	— ٨	—٢ ل ن	— ٥ $س^{٢}$ ف	— ب م
الباقي	— ٩		— ٧ $س^{٢}$ ف	

امثلة تشابهت بها الاشارات والمطروح اعظم من المطروح منه

من	١٨	٦ ب ل	— ٣ $ك^{٢}$ن	— ٨ ه
اطرح	٢٠	٨ ب ل	— ٥ $ك^{٢}$ن	— ب ه
الباقي			٢ $ك^{٢}$ن	(ب — ٨) ه

من	٤٢	— ٢ د	٨ ط م	— ٥ ل^٢ ك^٢
اطرح	— ٢٥	٧ د	— ٤ ط م	٤ ل^٢ ك^٢
الباقي	٦٧	— ٩ د		

امتحان الطرح : اضف الباقي الى المطروح بعلاماته الاصلية فان عدل المجتمع المطروح منه كان العمل صحيحاً والا فلا

مثاله ٨ د ى — هـ + ٣ ل^٢ ٥ د ى + ٢ هـ — ٤ ل^٢

٥ د ى + ٢ هـ — ٤ ل^٢ ٣ د ى — ٣ هـ + ٧ ل^٢

———————— ————————

٣ د ى — ٣ هـ + ٧ ل^٢ ٨ د ى — هـ + ٣ ل^٢

تنبيه ١ اذا تعددت الحدود المتشابهة في المطروحين يجب اصلاحها اولاً

مثاله من ٨ ل ف — ٣ ح د + ٣ ل ف — ٢ ح د

اطرح ٥ ل ف + ٢ ح د + ٤ ح د — ٣ ل ف — ٨

بالاصلاح ١١ ل ف — ٥ ح د

٢ ل ف + ٦ ح د — ٨

————————

الباقي ٩ ل ف — ١١ ح د + ٨

من ٨ + ٤ س^٣ د^٢ — ٩ س^٢ د^٢ + ٨ س^٢ د^٣ — ٥ ب^٦

اطرح ٤ — ٢ س^٣ د^٢ — ٧ س^٢ د^٢ + ٧ س^٢ د^٣ — ٣ ب^٦

————————

الباقي

تنبيه ٢ : ك + ل — (د — م) = ك + ل — د + م

فالعبارتان متساويتان انما الاولى تدل على طلب الطرح والثانية على نتيجته اذاً

(١) الكميات المحصورة باشارة سلبية تفك بتبديل اشارات اجزائها

(٢) اذا اريد حصر عدة حدود باشارة سلبية تغير اشاراتها

مثاله ٣ ك ى — ٤ ك + ١٥ ل = ٣ ك ى — (٤ ك — ١٥ ل)

تنبيه٣ الطرح الجبري لا يفيد النقصان دائماً فطرح كمية سلبية كجمع كمية ايجابية   مثال ذلك

٨ − (− ٦) = ٨ + ٦ = ١٤

اخر : رجل له دين ٨ غروش واخر عليه دين ٦ غروش فما هو الفرق بينهما   الجواب ١٤

اي يلزم الثاني ١٤ غرشاً ليفي ما عليه و يصير معه قدر الاول

تمرين

(١) اطرح − ٢ س + ب   من ٢ س + ٣ ب

(٢) ٣ ك^٢ − ٤ د + ه^٢ من ٥ ك^٢ − ٢ د

(٣) ٥ √(د^٢ + ٤)   من ٨ √(د^٢ + ٤)

(٤) ٦ (د − م) + ١٤ من − ٥ (د − م) + ١٦

(٥) ما هي قيمة البواقي اذا كانت ب = ٢ د = ٥ س = ٤ ك = ٣ ه = ٧

(٦) اطرح ٣ د^٢س − ٥ د^٢س^٢ + ٢ ه من ٤ د^٢س^٢ + ٦ د^٢س − ٦ ه

(٧) من ٤ ب ي^٣ − ٣ ب^٢ ي^٢ + ب^٣ ي − ب^٤ + ٢ √ب − ٣ ∛ي^٢

اطرح ٣ ب ي^٣ + ب^٢ ي^٢ − ب^٣ ي − ٢ ب^٤ + ٣ √ب − ٥ ∛ي^٢

(٨) حل ٥ ه ب^٢ − ٤ ه د + ٣ د^٢ − ٨ − ٣ (ه ب^٢ − ٥ ه د) + (٢ د^٢ + ١٠)

(٩) حل ٣ ي^٢ + د^٢ − ٢ √(ب س) − (٢ ي^٢ − د^٢ − ٣ √(ب س))

(١٠) رجل ايراده من تجارته ٢٠٠٠ غرش ومن املاكه ب غرشاً و مصروفه د − ٨٠٠ فكم يبقى عنده سنوياً : افرض ب = ٨٠٠٠ د = ١٠٠٠٠

(١١) دفع سليم اجرة بيت ٨٠٠٠ + ب واجرة مخزن ٢٠٠٠ + د فكم الفرق بينهما

(١٢) تزوج حنا وعمره ب سنة و بعد خمس سنين رزق ولدًا وعاش الولد د سنة ومات و بعد وفاته بِ (٢ د — ١٦) سنة توفي الوالد فكم سنة عاش افرض ب = ٢٦ د = ١٨

(١٣) سافر انيس الى دمشق ومعهُ بضاعة قيمتها ١٥٠٠٠ + ٢ د فاضاع منها ما يساوي ٤٠٠٠ + ب وصرف ما يساوي ٣٠٠٠ — ٢ ب غير انهُ ربح من البضاعة ٥٠٠٠ + ٣ ب فكم تكون قيمة الباقي معهُ

(١٤) ارفع حصر الكميات الاتية واصلحها

٣ ل + ٨ ب — (٤ ب — ٢ ل)

٥ م ن — ك٢ — (— ٤ م ن + ك٢ — ٣ م)

ب د٢ — (٢ + ٣ ب د٢)

(١٥) احصر الاجزاء المشار اليها بخط عرضي تحتها باشارة سلبية

٨ د م + ٤ هـ — ٣ س ٥ ل — ٦ م د + ٤ ن

٨ ل٢ + ٣ ك٢ — ٢ هـ د + ف ٤ ل٢ — ٤ د ف + ٣ م — ن٢

الفصل الرابع

في الضرب

(٣٧) الضرب تكرار المضروب مرارًا تماثل الاحاد او الاجزاء الموجودة في المضروب فيه

مثاله ب × ٥ = ب + ب + ب + ب + ب = ٥ ب

— ب × ٥ = — ب — ب — ب — ب — ب = — ٥ ب

لتكن د = ٦ ك × د = ٦ ك او د ك

— ك × د = — د ك

يلاحظ من الامثلة المتقدمة ان حاصل كميتين تتغير اشارته بتغير اشارة احداها وهو واضح ايضاً من انه اذا كانت احدى الكميتين مطروحة كان المراد طرح حاصلها فتتبدل اشارته

اذن $—ه \times ك = —(ه \times ك) = —(ه ك) = —ه ك$

كذا $—ه \times —ك = —(ه \times —ك) = —(—ه ك) = ه ك$

بالمثال الثاني تبدلت اشارة المضروب فيه ايضاً فتبدلت اشارة الحاصل مرة ثانية فعادت ايجابية والنتيجة

(٣٨) $+ \times + = +$: حاصل حد ايجابي بحد ايجابي ايجابي

$- \times + = -$ ″ ″ سلبي ″ ″ سلبي

$+ \times - = -$ ″ ″ ايجابي ″ سلبي ″

$- \times - = +$ ″ ″ سلبي ″ ″ ايجابي

قاعدة : اذا اتفق المضروبان بالاشارة فالحاصل ايجابي وان اختلفا فالحاصل سلبي

في مضروبين بسيطين

١ً اما ان يكون المضروبان قوات كمية واحدة وقاعدته

(٣٩) قوات كمية واحدة تضرب بجمع دلائلها

مثاله $ب^{٢} \times ب^{٣} = ب \times ب \times ب \times ب \times ب = ب^{٥}$ وهكذا $ك^{ل} \times ك^{م} = ك^{ل+م}$

$س^{-٢} \times س^{٤} = س^{٢}$ $ف^{ن} \times ف^{-د} = ف^{ن-د}$

٢ً واما ان يكونا غير ذلك وقاعدته

(٤٠) اضرب المسميات العددية فقوات الكمية الواحدة وضع ما بقي من القوات على التوالي

مثاله ٥ د^{٢} ب^{٣} ل × — ٣ د^{٢} ب س م^{٢} = — ١٥ د^{٤} ب^{٤} ل س م^{٢}

ضربنا ٥ × ٣ . د^{٢} × د^{٢} . ب^{٣} × ب . ل × س × م^{٢}

المضروب	٣ د ب	٥ ل م	— ٢ د هـ	٤ م ن
المضروب فيه	٤ م ن	— ٣ ب هـ	— ٣ ف	٣ م ل
الحاصل		— ١٥ ب ل هـ م		١٢ م^{٢} ل ن

	— ٢ س ع	— ٨ د^{٢} ب
	٤ د ع	— ٣ د س ف^{٢}
الحاصل		٢٤ د^{٣} ب س ف^{٢}

وهكذا لو تعددت المضاريب البسيطة مثاله ٥ ك^{٢} × —٣ د × — ٢ د

٥ ك^{٢} × —٣ د = — ١٥ ك^{٢} د ثم —١٥ ك^{٢} د × —٢ د = ٣٠ د^{٢} ك^{٢}

ملاحظة ١ : لا فرق في ترتيب الحروف كما انه لا فرق في ترتيب المضاريب

٢ × ٣ × ٤ = ٣ × ٤ × ٢ ب د م = ب م د

ملاحظة ٢ : + × + × + = + + × + × — = —

+ × — × — = + — × — × — = —

فيلاحظ من ذلك هذه القاعدة

(٤١) اذا كان عدد المضاريب السلبية وترًا كان الحاصل سلبياً والا فهو ايجابي

ملاحظة ٣ : ك د × ك د = ك^{٢} د^{٢} او (ك د)^{٢}

يلاحظ من ذلك : اذا تساوت قوة كميتين يمكن حصرها بتلك القوة المشتركة . وبعبارة اخرى : قوة حاصل كميات تساوي حاصل قواتها

ملاحظة ٤ : ٨ ك × ٣ د ك^{٢} × ٤ د^{٢} س ل = ٩٦ ك^{٣} د^{٣} س ل

درجة الحد الاول ١ والثاني ٣ والثالث ٤ فدرجة الحاصل ٨

يتضح منه ان درجة حاصل عدة مضاريب تساوي مجموع درجاتها

تمرين

اضرب د^{٢} X د X د^{٤} (٢) س^{٢} X س$^{-٢}$ X — س (٣) ي$^{-م}$ X —ي^{ن} X ي^{٢}

(٤) ٣د ب X ٢ى س (٥) —٤ د^{٢} ب X ٣د م (٦) ٥د^{٢}ب$^{-٢}$ X —٤ د^{٢} ب

(٧) اشترى عمر ٢ ب رطلاً من الزيت بسعر الرطل ب غرشاً و٥ د ذراعاً من الجوخ بسعر الذراع ٢ د غرشاً فبكم جملة ما اشترى

(٨) رجل اشتغل د يوماً باجرة ٥ غروش يومياً و ٤ هـ يوماً باجرة ٨ هـ غرشاً يومياً و٢ ى يوماً باجرة ى غرشاً يومياً فكم بلغت اجرته

(٩) رجل ثمن ساعته ك ولو ضرب هذا الثمن في ٤ واضيف الى الحاصل ٧٠ وطرح من المجتمع ٦٠ يكون الباقي ٢٣٠ فكم هي قيمة ك

حدود كثيرة في حد واحد

(٤٢) اضرب كل حد من المضروب في المضروب فيه مراعياً اشارة كلٍ منهما

مثاله : ٣ X (ك — ٢ + ن) = ٣ ك — ٦ + ٣ ن

لان ك — ٢ + ن اضرب ٢ ك — ٢ ل + ١

ك — ٢ + ن في ٣ ل

ك — ٢ + ن الحاصل ٦ ل ك — ٦ ل^{٢} + ٣ ل

٣ ك — ٦ + ٣ ن

المضروب ى — ٢ د^{٢} + م ن^{٢}

المضروب فيه — ٢ ك^{٢}ن د$^{-١}$

الحاصل — ٢ ى ك^{٢}ن د$^{-١}$ + ٤ ك^{٢} د ن — ٢ م ك^{٢} ن^{٢} د$^{-١}$

ومن المناسب تمرين التلامذة على الضرب مع متابعة العمل كما يأتي

د (س + ل) = د س + د ل

— ب (ن — د) = — ب ن + ب د

٢ م ب (د — هـ ب^{٢} + ٥ م) = ٢ م ب د — ٢ م هـ ب^{٣} + ١٠ م^{٢} ب

تمرين

(١) (٢ ب + ٣ هـ — ٢ ن) × ٤ هـ ب ن

(٢) (٢ م — ٦ س + ل) × — ٢ م ل

(٣) (٤ ب^{٢} — ٣ هـ^{٢} + د) × ٢ ب هـ

(٤) (٢ ب + ٣ د^{٢} — و^{٢}) × — ٥ ب^{٢} د

(٥) (٨ م^{٢} ن — ٣ م$^{-١}$ ن^{٢}) × ٢ م × — ٤ ن^{٢}

(٦) (٦ ك^{٣} — ٢ د ك^{٢} + د^{٢} ك — ٤ د^{٣}) × — ٤ د^{٢} ك$^{-١}$

(٧) رجل اشترى د رطلاً من الخل وكان سعر الرطل مساوياً لعدد الارطال فمزجه بِـ هـ رطلاً من الماء و باع الرطل من المزيج بسعر ل فبكم غرش اشترى وبكم باع وما هو الفرق بينهما

استعلم قيمة الفرق العددية بفرض د = ٧ هـ = ٤ ل = ٥

(٨) سليم اخذ عشر ليمونات وخليل ب ليمونة زيادة عنه انما خليل دفع ثمن الليمونة س بارة وسليم اخذ الليمونة بزيادة خمس بارات عن سعر ما اشتراه خليل فكان ما دفعه سليم مساوياً ما دفعه خليل

كيف تركب هذه المعادلة وكم يكون ثمن ليمونة خليل اذا كانت ب = ٥

(٩) حليم كان يحفظ عشرة اسطر يومياً ووديع هـ سطراً بزيادة عنه يومياً انما وديع بعد درسه س يوماً مرض د يوماً فحفظ حليم ما حفظه وديع تماماً كيف تكتب هذه المعادلة وكم يوماً يكون قد درس لو فرض د = ٨ هـ = ١٠

(١٠) ثلثة انابيب تصب في بركة الاول منها يصب ب مترًا والثاني د والثالث ه في الساعة وفي اسفلها مصرف يفرغ منها $\frac{١}{٢}$ب + $\frac{١}{٢}$د + $\frac{١}{٤}$ه مترًا في الساعة فكم يبقى في البركة بعد يومين

ضرب حدود كثيرة في مثلها

(٤٣) قاعدة : اضرب كل حد من المضروب فيه في كل حد من المضروب واكتب الحواصل المتشابهة بعضها تحت بعض ثم اجمع الحواصل

د + م	ك — ل + م
٢ د — م	٢ — د
٢د^{٢}+ ٢ د م	٢ك — ٢ل+٢م — د ك+د ل— دم
— د م — م^{٢}	
٢د^{٢}+ د م — م^{٢}	

(٤٤) تسهيلاً لاصلاح الحواصل المتشابهة يقتضي تنظيم العبارة قبل الضرب وكيفية ذلك ان ترتب الحدود باعتبار قوات احد احرفها مبتدئًا من الاعلى فما تحته وبالعكس

مثاله : (٥ ك^{٣}— ٣ ك^{٢}د + ٢ ك د^{٢}— د^{٣}) X (٢ ك — د)

نُظمت الحدود باعتبار قوة ك المتناقصة وقوة د المتزائدة

٥ ك^{٣}— ٣ ك^{٢}د + ك د^{٢}

ك^{٢}— ك د

٥ ك^{٥}— ٣ ك^{٤}د + ك^{٣} د^{٢}

— ٥ ك^{٤}د +٣ك^{٣}د^{٢}— ك^{٢} د^{٣}

٥ ك^{٥}— ٨ ك^{٤}د +٤ك^{٣}د^{٢}—ك^{٢} د^{٣}

(٢ب — ٣ل) (٥ د ب^{2} + ٦ل ب د — ٢ب ل^{2}) = ١٠ د ب^{3} + ١٢ ب^{2}ل د
— ٤ ب^{2}ل^{2} — ١٥ ل د ب^{2} — ١٨ ل^{2}ب د + ٦ ب ل^{3}

تمرين

(١) اضرب ٢ د^{3} + ٣ م — ه في د — م

(٢) ٥ ل — ٢ ن + ب في ٤ — ل — ن

(٣) ل^{2} — ٢ب + ب^{2} في ل — ب

(٤) (د^{3} — د^{2}س + د س^{2} — س^{3}) (د + س)

(٥) ك^{3} — ك^{2}ى + ٣ ك ى^{2} — ٢ ى^{3} في ٢ ك^{2} — ك ى + ى^{2}

(٦) ٢ د^{2} — د ه + د$^{-1}$ه^{2} في د^{2} — ه

(٧) ك^{2}ى$^{-2}$ + ٣ ك^{2}ى$^{-1}$ — ٤ ك في ٣ ك — ى$^{-1}$

(٨) نظم ٨ ك^{2}ى^{2} — ١٠ ك^{4} + ٦ ى^{4} — ٥ ك ى^{3} + ٣ ك^{3}ى

(٩) ٦ د^{3} — ١ + ٨ د — ٤ د^{2} في د — ١

(١٠) ٢ ب^{3} + ٣ د^{2}ب + ٤ د^{3} — ٢ د ب^{2} في د — ب

(١١) (ب^{4} + ب^{3}ح + ب^{2}ح^{2} + ب ح^{3} + ح^{4})(ب — ح)

(١٢) ثلثة اخوة اشتغل الاول منهم ب والثاني ب + ٢ والثالث ب + ٤ يوماً وبنى الاول د — ٦ والثاني د — ٤ والثالث د — ٢ ذراعاً يومياً واخذوا اجرة كل ذراع بنوه (ب — د + ٣) غرشاً فكم بلغت اجرتهم كم بلغت اجرتهم لو فرض ب = ١٠ د = ٨

(١٣) تاجر ابتنى داراً فاشتغل بها (ب + ٤) بناء و (ب — ٦) نجاراً و (ب — ٨) دهاناً و (ب — ٤) عاملاً بصنائع اخرى واشتغل البناؤون (ب + ٣ د^{2}) يوماً والنجارون ب + ٦ د يوماً والدهانون ب + ٢ د يوماً والاخرون ب + د يوماً فبكم يوم تمت داره اذا كان كل جوق عمل بعد الاخر

لكن ب = ٢٠ د = ٥ فكم كانت الايام

(١٣) امين ينفق د غرشاً يومياً ومتري ينفق ب غرشاً يومياً زيادة عنه غير ان ايراد امين كان مضاعف مصروف متري وايراد متري اقل من ثلاثة اضعاف ما يوفره امين يومياً بمبلغ ٤ ب فكم يبلغ الفرق بينهما بعد د + ب يوماً

كم يزيد ما عند متري لو فرض د = ٢٠ ب = ١٠

وكم يزيد ما عند امين لو فرض د = ١٠ ب = ١٥

(١٤) رجل اشترى اذرعاً من القماش و د ذراعاً من الكتان بمبلغ ٥٤٠ غرشاً وكان ثمن الذراع من الكتان د — ١٨ فكم كان ثمن القماش

نظريات في الضرب

سابقة: مربع حد هو حاصل ضربه في نفسه او قوته المالية

مثاله $(٥ د)^{٢} = ٥ د \times ٥ د = ٢٥ د^{٢}$

(٤٥) تربع الكمية بضرب دليلها في ٢ وتربيع مسماها العددي

مربع $ب هـ = ب^{٢} هـ^{٢}$ مربع $- ٥ ب د^{٣} = ٢٥ ب^{٢} د^{٦}$

الجذر المالي لحد هو حد اخر مربعه يساوي الحد المفروض

مثاله $\sqrt{٢٥ د^{٢}} = ٥ د$ $\sqrt{ب^{٢} هـ^{٢}} = ب هـ$

(٤٦) يؤخذ الجذر المالي من كمية بقسمة دليلها على ٢ وتجذير مسماها العددي

الجذر المالي من $٢٥ ب^{٢} د^{٦} = ٥ ب د^{٣}$ او $- ٥ ب د^{٣}$ كما ستعلم

الجذر المالي من $٤ د^{٢} هـ^{٤} س^{٦} = ٢ د هـ^{٢} س^{٣}$

الجذر المالي من $(ب - س)^{٢} = ب - س$

الجذر المالي من $(ب^{٢} - د)^{٤} = (ب^{٢} - د)^{٢}$

تمرين

ربع ب د ، ٢ ك^{٢}د ، ٣ س^{٢}م^{٢} ، — ٤ ب^{٢} ، — ٨ د^{٢}

ما هو الجذر المالي من د^{٢} ب^{٢}د^{٤} ٩ ه^{٤}م^{٦} ٤ ك^{٢}س^{٨}

(ب — د)^{٤} (٢ س — ه)^{٢} (٤ ب^{٢} — س^{٢})^{٢}

نظرية ١ . — حاصل مجتمع حدين في فضلتهما يساوي فضلة مربعيهما

مثاله

ب + د
ب — د
ب^{٢} + ب د
— ب د — د^{٢}
ب^{٢} — د^{٢}

٢ م^{٢} + س
٢ م^{٢} — س
٤ م^{٤} + ٢ م^{٢}س
— ٢ م^{٢}س — س^{٢}
٤ م^{٤} — س^{٢}

اخر (٣ د ل + ٢ ك) (٣ د ل — ٢ ك) = ٩ د^{٢}ل^{٢} — ٤ ك^{٢}

(٣ ب + ٤ ن^{٢}) (٣ ب — ٤ ن^{٢}) = ٩ ب^{٢} — ١٦ ن^{٤}

١٩٩٨ × ٢٠٠٢ = ٢٠٠٠^{٢} — ٢^{٢} = ٣٩٩٩٩٩٦

نظرية ٢ . — مربع مجتمع حدين يساوي مربع الحد الاول مع مضاعف حاصل الحدين مع مربع الحد الثاني . مثاله

ب + د
ب + د
ب^{٢} + ب د
+ ب د + د^{٢}
ب^{٢} + ٢ ب د + د^{٢}

٢ س + م
٢ س + م
٤ س^{٢} + ٢ س م
+ ٢ س م + م^{٢}
٤ س^{٢} + ٤ س م + م^{٢}

(٢ د^{٢} + ٣ ك)^{٢} = ٤ د^{٤} + ١٢ د^{٢}ك + ٩ ك^{٢}

$٩٠١^٢ = (٩٠٠ + ١)^٢ \begin{cases} ٩٠٠^٢ = ٨١٠٠٠٠ \\ ٢ \times ٩٠٠ \times ١ = ١٨٠٠ \\ ١^٢ = ١ \end{cases}$

٨١١٨٠١

نظرية ٣ : مربع فضلة حدين تساوي مربع الحد الاول الا مضاعف حاصل الحدين مع مربع الحد الثاني

$(ب - ى)^٢ = ب^٢ - ٢ب ى + ى^٢$

$(٢ل^٢ - ن)^٢ = ٤ل^٤ - ٤ل^٢ن + ن^٢$

$(٣د^٢ - ه^٢)^٢ = ٩د^٤ - ٦د^٢ه^٢ + ه^٤$

$١٩٩٩^٢ = (٢٠٠٠ - ١)^٢ \begin{cases} ٢٠٠٠^٢ = ٤٠٠٠٠٠٠ \\ -٢ \times ٢٠٠٠ \times ١ = -٤٠٠٠ \\ ١^٢ = ١ \end{cases}$

٣٩٩٦٠٠١

نظرية ٤ : اذا اشترك حد في مضروبين من المقتضي ضربه في بقية حدود المضروب وبقية حدود المضروب فيه فتسهيلاً للعمل يضرب في مجتمع تلك الحدود مع مراعاة اشاراتها

$(ك + د)(ك - ب) = ك^٢ + ك(د - ب) - د ب$

$(ك + ٩)(ك - ٧) = ك^٢ + ك(٩ - ٧) - ٦٣$

$(٢ب + ٢د - ه)(٢ب + ه) = ٤ب^٢ + ٢ب(٢د - ه + ه) + ٢د ه - ه^٢$

$= ٤ب^٢ + ٤ب د + ٢د ه - ه^٢$

$٥\frac{١}{٢} \times ٧\frac{١}{٢} = \frac{١}{٤} + \frac{١}{٢}(٥ + ٧) + ٥ \times ٧ = ٣٩\frac{١}{٤}$

تمرين

(١) $(٢ه - ب)(٢ه + ب) =$

(٢) (٣ م^{٢} + د) (٣ م^{٢} − د) =

(٣) (٤ د س^{٢} − ٢ ل^{٢})(٤ د س^{٢} + ٢ ل^{٢}) =

(٤) (٤ م^{٢} + ٢)^{٢} =

(٥) (ل − ٣ ى ﻫ)^{٢} =

(٦) (٥ ﻫ^{٢} − ٤)^{٢} =

(٧) (د + ب) − (د − ب)^{٢} =

(٨) [(د − س)^{٢} + ب] [(د − س)^{٢} − ب] =

(٩) [م + (٣ س − ﻫ)^{٢}] [م − (٣ س − ﻫ)^{٢}] =

(١٠) ١٩٩٦ × ٢٠٠٤ او (٢٠٠٠ + ٤)(٢٠٠٠ − ٤) =

(١١) ٢٠١٢ × ٢٠١٢ او (٢٠٠٠ + ١٢)^{٢} =

(١٢) ٢٩٩٩ × ٢٩٩٩ او (٣٠٠٠ − ١)^{٢} =

(١٣) (٢ ب + ن)^{٢} = (١٤) (٣ د + ٤ ب ى)^{٢} =

(١٥) (٢ د^{٢} + ٤ ل)^{٢} = (١٦) (س − ٣ ى)^{٢} =

(١٧) (٤ ل − ٢ ى^{٢})^{٢} = (١٨) (ب^{٢} − د)^{٢} =

(١٩) (٥ + ك − ب)(٥ + ب) =

(٢٠) (٢ د − م)(٢ د + ٢ م) =

(٢١) (٣ ك − ٢ د + س)(٣ ك + د − س) =

(٢٢) ١٠٥ $\frac{٣}{٤}$ × ٩٥ $\frac{٣}{٤}$ = (٢٣) (ب − ٢٤)(ب + ١٨) =

(٢٤) (ك − ١٥)(ك − ٤) = (٢٥) (ك − ٨)(ك + ١٢) =

الفصل الخامس

في القسمة

(٤٧) القسمة هي طريقة لايجاد عبارة اذا ضربت في المقسوم عليه حصل منهما المقسوم وتلك العبارة تدعى الخارج

القسمة عكس الضرب فلنا مما سبق في استعلام اشارة الحاصل القاعدة الاتية لاستعلام اشارة الخارج

« اذا اتفق المقسومان بالاشارة فالخارج ايجابي وان اختلفا فهو سلبي »

اي $+ \div + = +$ $\qquad - \div - = +$

بالعكس $+ \div - = -$ $\qquad - \div + = -$

قاعدة عامة

(٤٨) ضع المقسوم صورة والمقسوم عليه مخرجاً على هيئة كسر دارج

مثلاً $\frac{ب}{ك}$ $\quad \frac{٢ب + س}{د}$ $\quad \frac{م}{٣م - ه}$ $\quad \frac{٤ب - س}{٣ب + ن}$

وتمكن القسمة تماماً والاختصار كما سيأتي

في قسمة حد على حد

١ً في حدين من قوات كمية واحدة

(٤٩) « تقسم قوات كمية واحدة بطرح دليل المقسوم عليه من دليل المقسوم ووضع الباقي دليلاً للكمية»

مثاله $ك^{٥} \div ك^{٣} = ك^{٥-٣} = ك^{٢}$

$دم^{ن} \div م^{ب} = دم^{ن-ب}$

والبرهان واضح فان $ك^{٢} \times ك^{٣} = ك^{٥}$ و $دم^{ن-ب} \times م^{ب} = دم^{ن}$ (٤٧)

(٥٠) الدليل الصفري ٠ — قد ينتج دليل الخارج صفراً فتكون قيمته المطلقة واحداً

مثاله $ك^{٣} \div ك^{٣} = ك^{٣-٣} = ك^{٠}$ اي ١

$ب^{٢} \div -ب^{٢} = -ب^{٢-٢} = -ب^{٠}$ اي -١

وذلك لان الخارج من قسمة مقدار او حد على نفسه واحدٌ ابدًا

(٥١) الدليل السلبي . — قد يكون دليل الخارج سلبياً فتكون قيمته واحدًا مقسومًا على نفس الخارج بدليل ايجابي اي يساوي مكفوءه بدليل ايجابي

لو قسمنا $م^{٤} \div م$ ثم الخارج على م ايضاً وهلمّ جرًّا لحصلت القوات الاتية

$$م^{٤} \quad م^{٣} \quad م^{٢} \quad م \quad م^{٠} \quad م^{-١} \quad م^{-٢} \quad م^{-٣}$$

$$\text{او} \quad م^{٤} \quad م^{٣} \quad م^{٢} \quad م \quad ١ \quad \frac{١}{م} \quad \frac{١}{م^{٢}} \quad \frac{١}{م^{٣}}$$

$$\text{وعليه} \quad ك^{-١} = \frac{١}{ك} \quad (ب + م)^{-٢} = \frac{١}{(ب + م)^{٢}}$$

امثلة على قسمة القوات

$$م^{٢د} \qquad ٦ى^{د+٢} \qquad -٨(د + ى)^{ن} \qquad ب^{٥} \qquad -(م + ى)^{-٥}$$

$$\frac{م^{د}}{م^{د}} \qquad \frac{-٢ى^{٢}}{-٣ى^{د}} \qquad \frac{-٤(د + ى)^{٢}}{٢(د + ى)^{ن-٢}} \qquad \frac{ب^{-٣}}{ب^{٢}} \qquad \frac{(م + ى)^{-٣}}{-(م + ى)^{٢}}$$

تمرين

اقسم $٥د^{٦} \div د^{٢}$ (٢) $ه^{٤} \div ه^{-٢}$ (٣) $ك^{٣} \div ك^{٢}$

(٤) $-س^{٨} \div س^{٥}$ (٥) $-ف^{٦} \div ف^{٨}$ (٦) $د^{٢} \div -د^{٢}$

(٧) $م^{ن} \div م^{٤}$ (٨) $ع^{ب} \div -ع^{-٢}$ (٩) $ل^{ه} \div ل^{ن}$

(١٠) $ك^{-٣} \div ل^{٢}$ (١١) $(ك + ل)^{٢} \div (ك + ل)^{٢}$

(١٢) ما هي القيمة العددية لهذه العبارة اذا كانت د = ١

$$\frac{س^{٠} + ل^{٠} + د}{٤}$$

كيف تكتب بصورة اخرى

(١٣) ك$^{-٢}$ (١٤) م$^{-ن}$ (١٥) (ل + ه)$^{-٢}$ (١٦) (ك ــ ب)$^{-٢}$

(١٧) $\frac{١}{ب^{٢}}$ (١٨) $\frac{١}{د^{ن}}$ (١٩) $\frac{١}{(ب+م)^{٢}}$ (٢٠) $\frac{١}{(د-ن)^{٢}}$

(٢١) المفروض ب = ٢ و ه = ١ فما هي قيمة ب$^{-٢}$ × (ه + ب)$^{-٢}$

(٢٢) المفروض ب = ٣ فما هي قيمة ب^{٠} + ب + ب$^{-١}$

٢ً في حدين من قوات متنوعة

(٥٢) اقسم المسميات ثم اطرح دليل كل حرف من المقسوم عليه من دليل مثله في المقسوم ثم ضع عن يسار الخارج الكميات الباقية من المقسوم

اقسم ١٦ ك^{٣}ب^{٢}د	٣ ب^{٢}ى^{٢}دن	ــ ٨ د^{٣}ى^{٢}ه م
على ٨ ك^{٢}ب	ــ ب^{٢}ى ن	ــ ٤ د^{٢}ى ه
الخارج ٢ ك ب د	ــ ٣ ى د	
اقسم ٤ ت$^{-٢}$د^{٢}ه	ــ ١٠ ل^{٢}م$^{-٢}$ه^{٢}	١٨ د^{٤}ك$^{-٢}$ع^{٢}
على ٢ ت$^{-١}$د ه	ــ ٥ ل$^{-٢}$م$^{-١}$ه^{٢}	ــ ٦ د$^{-٢}$ك^{٢}ع$^{-١}$
الخارج	٢ ل^{٤}م$^{-١}$ه	ــ ٣ د^{٦}ك$^{-٤}$ع^{٣}

(٥٣) امكان قسمة حد على اخر تماماً : يشترط لامكان قسمة حد على اخر تماماً ان تكون كل قوة في المقسوم عليه داخلة في المقسوم وادنى مما يماثلها.

تنبيه : اذا لم تتم الشروط المذكورة اختصر المقسومين باسقاط القوات المشتركة بينهما من كليهما

$$\frac{٨\,ت^{٢}ى\,ل}{٦\,ت\,د\,ل} = \frac{٤\,ت\,ى}{٣\,د} \qquad \frac{-١٢\,ل^{٢}م^{٢}د}{٤\,ل\,م^{٢}س} = \frac{-٣\,ل\,د}{س}$$

$$\frac{-٤\,ف^{٢}د^{٢}ط}{-٣\,ف\,س} = \frac{٤\,ف\,د^{٢}ط}{٣\,س} \qquad \frac{١٠\,ك^{٢}ب\,س^{٢}}{٥\,ك^{٣}ب^{٢}س\,د} = \frac{٢\,س}{ك\,ب\,د}$$

تمرين

اقسم ٨ د^{٣} ب^{٢} ÷ ٤ د ب^{٢} (٢) ١٤ د^{٤} م^{٣} ÷ — ٧ د م^{١}

(٣) ٩ و^{٢} ك^{٥} ÷ — ٣ و ك^{٤} (٤) ٦ هـ^{٢} ف^{٢} ÷ ٣ هـ ف

(٥) — ٤ ن^{٣} ب^{٢} ÷ ٤ ن ب   (٦) — ١٥ د^{٣} ب^{٢} ن ÷ — ٣ د^{٢} ب^{٢}

(٧) $\frac{\text{٩ د}^{٣}\text{ب}^{٥}\text{س}}{\text{٣ د}^{٤}\text{ب}^{٦}\text{ن}}$ (٨) $\frac{\text{— ٤ هـ}^{٢}\text{ب}^{٢}\text{ف}}{\text{٨ هـ}^{٢}\text{ب ص}}$ (٩) $\frac{\text{١٨ د ف هـ}^{٢}}{\text{٤ د}^{٢}\text{ف ل}}$

(١٠) $\frac{\text{٣ م}^{٢}\text{ب}^{٤}\text{د}^{٢}}{\text{— ٤ م}^{٢}\text{ب هـ}}$ (١١) $\frac{\text{— ٥ د}^{٢}\text{ب}^{٦}\text{ل}}{\text{— ٣ د}^{٤}\text{ب}^{٢}\text{م}}$ (١٢) $\frac{\text{— ٣ ل}^{٢}\text{ك}^{٢}\text{ى}}{\text{— ٧ ل ك}^{٢}\text{ن}}$

(١٣) رجل اشتغل ب يوماً باجرة يومية قدرها د^{٢} ثم تصدق بما ناله على د فقيراً فكم نال كلاً منهم

(١٤) ملاّك عنده ب بستاناً وفي كل بستان له شريكان فوزع يوماً على كل منهم غروشاً تساوي مضاعف عدد بساتينه واذ علم جاره بذلك وزع ايضاً على شركائه ٢٠ ب^{٢} غرشاً فاصاب كلاً منهم قدر ما وزع رفيقه على جميع شركاه فكم شريكاً كان عند الثاني وكم تكون على فرض ب = ٥

(١٥) بستاني قطف س ليمونة فاكل منها ٣ وباع ربع الباقي فكم ليمونة باع

في قسمة عبارة مركبة على بسيطة

(٥٤) اقسم كل حد من المقسوم على المقسوم عليه

مثاله	٦ ك ل^{٤} — ٣ ل^{٢} + ٩ د ل^{٣}	ب ك — ٢ د ك^{٢}
على	٣ ل^{٢}	— ك
الخارج	٢ ك ل^{٢} — ١ + ٣ د ل	— ب + ٢ د ك

تنبيه : يشترط لامكان هذه القسمة تماماً امكان قسمة كل حد من المقسوم كما سبق اي وجود قوات المقسوم عليه في كل حد من المقسوم

في قسمة عبارة بسيطة على مركبة

(٥٥) لايمكن اجراء هذه القسمة تماماً اذ لايمكن ان تضرب حدود كثيرة فيحصل منها حد واحد فالعمل بذلك حسب القاعدة العامة

مثاله

$$\frac{٣\ م}{د\ م + ٢\ ل} \qquad \frac{٤\ هـ}{٤\ ل - ٣\ هـ}$$

تنبيه ان وجد في المقسوم ما هو مشترك في كل جزء من المقسوم عليه يسقط منهما للاختصار مثاله

$$\frac{٣\ ل\ د}{ك\ ل + ٣\ س\ ل^{٢} + ٣\ ل\ د} = \frac{٣\ د}{ك + ٣\ س\ ل + ٣\ د}$$

تمرين

(١) اقسم ٤ د^{٢}ب^{٢} + ٨ د ب^{٢} — ١٦ د^{٢}ب على ٤ د ب

(٢) ٣ د^{٢}س^{٢} — ٦ د^{٢}س^{٣} + ٩ د س^{٤} على ٣ د س^{٢}

(٣) ٢ ب ى^{٥} — ٤ ب^{٢} ى^{٤} + ٦ ب^{٣} ى^{٣} — ٨ ب^{٤} ى + ١٠ ب^{٥} ى على — ٢ ب ى

(٤) ٥ م^{٢}هـ^{٢} — ١٠ م^{٣}هـ^{٢} + ١٥ م^{٤}هـ^{٢} على — ٥ م^{٢}هـ^{٢}

(٥) ٤ ك^{٢}ب^{٢} — ٦ ك^{٢}ب + ٨ ك^{٥}ب على ٤ ك^{٢}ب^{٢}

(٦) ١٠ د^{٢}ى^{٢} — ٤ د^{٢}ى^{٤} + ٦ د^{٥}ى^{٢} على — ٨ د^{٢}ى

(٧) ٨ ف^{٢} على ٤ ف + ٨ ف^{٢} + ١٢ ف^{٣}

(٨) — ٤ ى^{٢} على ٤ ى^{٣} — ٣ ى^{٤} + ٦ ى^{٥}

ابدل المقسومين في العبارات السابقة واستعلم الخارج

(٩) رجل استأجر ب فاعلاً فاشتغلوا د يوماً وكانوا كل يوم يبنون اذرعاً قدر مضاعف عددهم الا اربعة اذرع ثم زادهم فاعلين فاشتغلوا مدة تزيد عن الاولى ثلثة ايام وهم يبنون يومياً اذرعاً قدر مضاعف عددهم

فبقي من البناء ما يقل عن جملة ما اشتغلوه ١٢ ذراعاً فكم يوم يلزم لفعلة عددهم ب يشتغلون يومياً اذرعاً قدر مضاعف عددهم ليتموا البناء المذكور في كم يوم يتمونه لو فرض د = ٨

في قسمة عبارة مركبة على مثلها

(٥٦) نظم حدودها باعتبار قوات كمية واحدة فيهما ثم اقسم الجزء الاول من المقسوم على الاول من المقسوم عليه ثم احفظ الخارج واضرب فيه المقسوم عليه بتمامه واطرح الحاصل من المقسوم ثم اقسم الجزء الاول من الباقي واتم العمل كما سبق الى الاخير

ب + ل) ب ك + ل ك + ب د + ل د (ك + د

ب ك + ل ك

―――――――

ب د + ل د

ب د + ل د

―――――――

٠٠ ٠٠

مثال اخر

٣ك^{٢} + ٤ك — ٣) (٥ك^{٣} — ٣ك^{٢} + ٢ك — ٢

١٥ك^{٥} + ١١ك^{٤} — ٢١ك^{٣} + ١١ك^{٢} — ١٤ك + ٨

١٥ك^{٥} — ٩ ك^{٤} + ٦ ك^{٣} — ٦ ك^{٢}

―――――――

٢٠ك^{٤} — ٢٧ك^{٣} + ١٧ك^{٢} — ١٤ك

٢٠ك^{٤} — ١٢ك^{٣} + ٨ ك^{٢} — ٨ ك

―――――――

— ١٥ك^{٣} + ٩ ك^{٢} — ٦ ك + ٨

— ١٥ك^{٣} + ٩ ك^{٢} — ٦ ك + ٦

―――――――

٠٠ ٠٠ ٢

تنبيه : اضف الباقي الى حاصل الخارج في المقسوم عليه فينتج المقسوم

يمكن اجراء القسمة على منوال اخر

(٥٧) حل المقسوم والمقسوم عليه الى اضلاعهما اي مضاريبهما الاصلية واسقط من كليهما الاضلاع المشتركة بينهما

مثاله
$$\frac{٢ك - ٢ل}{ك - ل} = \frac{٢(ك - ل)}{ك - ل} = ٢$$

$$\frac{د ب + س ب}{د + س} = \frac{(د + س) ب}{د + س} = ب$$

تنبيه : اذا لم تكن كل اضلاع المقسوم عليه داخلة في المقسوم فلا تمكن القسمة تماماً بل الاضلاع الباقية في المقسوم تبقى صورةً على المخرج الباقي من اضلاع المقسوم عليه

$$\frac{ن د + س د}{ن هـ + هـ س} = \frac{(س + ن) د}{(س + ن) هـ} = \frac{د}{هـ}$$

تمرين

(١) اقسم ب د — ب م + ب ن — هـ د + هـ م — هـ ن على ب — هـ

(٢) ٦ ن ك — ١٨ ن ل + ٢٤ د ن ب — ٥ ف ك + ١٥ ف ل — ٢٠ ف د ب على ٦ ن — ٥ ف

(٣) ٣٢ ب د ل — ٢٠ ب س ن + ١٢ ب ع — ٢٤ د ل ف + ١٥ س ف ن — ٩ ف ع + ٨ د ل — ٥ س ن + ٣ ع على ٤ ب — ٣ ف + ١

(٤) $ك^{٥}$ — ٣ $ك^{٤}$ — ٨ $ك^{٣}$ + ٣ $ك^{٢}$ + ك على $ك^{٢}$ + ٢ ك + ١

(٥) ١٥ $ك^{٦}ب^{٤}$ — ١٦ $ك^{٥}ب^{٥}$ + ٢٩ $ك^{٤}ب^{٦}$ — ١٥ $ك^{٣}ب^{٧}$ + ٢ $ك^{٢}ب^{٨}$ على ٥ $ك^{٢}ب^{٢}$ — ٢ ك $ب^{٣}$

(٦) $س^{٤} — س^{٣}ل + س^{٢}ل^{٢} — س ل^{٣}$ على $س^{٢} + ل^{٢}$

(٧) $و^{٥} — ٢ و^{٤} ف + و^{٣} ف^{٢} — و^{٢} ف^{٣} + ف^{٥}$ على $و^{٢} + ف^{٢}$

(٨) $— ٢ ى^{٤}ب^{٢} — ٤ ى^{٢} ب^{٤} — ٢ ب^{٦}$ على $٢ ى^{٢} + ٢ ب^{٢}$

(٩) $٢ — ٣ ع — ٥ ع^{٢} + ٤ ع^{٣} — ٦ ع^{٤}$ على $١ — ٤ ع + ٣ ع^{٢}$

(١٠) $ن^{٤} — ٧ ن^{٣} + ١٠ ن^{٢} + ٧ ن — ٥$ على $ن^{٢} — ٥ ن + ٣$

(١١) رجل اشترى خمسة اثواب من القماش س منها زرقاء والبقية سوداء وكانت اذرع الثوب الاسود ب واذرع الثوب الازرق اقل من اذرع الثوب الاسود بخمسة وكان ثمن الذراع من اللون الواحد بقدر عدد اذرع الثوب من اللون الاخر ثم باعها باثمانها الى رجال عددهم (ب — ٥) فكم غرش اخذ من كل منهم

كم يكون ما دفعه كل واحد لو فرضت ب = ٢٦

نظرية في القسمة على فضلة كميتين

(٥٨) يعرف بدون اجراء العمل امكان قسمة عبارة مركبة على فضلة كميتين تماماً. ليكن المقسوم م والمقسوم عليه ب — د والخارج ج والباقي ق

فلنا م = (ب — د) ج + ق

بالتعويض عن ب بدال تصير (ب — د) = ٠ .

و م = ق

اي ان الباقي ق يساوي المقسوم م بعد ابدال الكمية ب الاولى بالثانية د

مثال ذلك: $٢ ب^{٣} — ٤ ب^{٢} + ٥ ب — ٤$ على ب — ٣

الباقي $٢ × ٣^{٣} — ٤ × ٣^{٢} + ٥ × ٣ — ٤ = ٢٩$

كما يتضح ايضاً لدى القسمة بالعمل فلنا من ذلك النظرية الاتية

كل عبارة تنقسم على فضلة كميتين تماماً اذا عدلت صفراً بعد التعويض فيها عن الكمية الاولى بالثانية والا فلا

نتيجة ١ : فضلة قوتين متشابهتين لكميتين تنقسم تماماً على فضلتهما اي ب^{م} — د^{م} تنقسم تماماً على ب — د لان الباقي د^{م} — د^{م} = ٠ حسبما تقدم بالتعويض مثاله

ب^{٤} — ٣^{٤} على ب — ٣ = ب^{٣} + ٣ ب^{٢} + ٣^{٢}ب + ٣^{٣}

ل^{٥} — د^{٥} على ل — د = ل^{٤} + د ل^{٣} + د^{٢}ل^{٢} + د^{٣}ل + د^{٤}

ترى ان حدود الخارج من ذلك ايجابية وهي سلسلة قوات منظمة درجتها اقل من درجة المقسوم بواحد

نتيجة ٢ : مجتمع قوتين متشابهتين لكميتين لا ينقسم تماماً على فضلتهما والباقي مضاعف قوة الثانية اي ب^{م}+د^{م} لا تنقسم على ب — د تماماً لان الباقي د^{م} + د^{م} = ٢ د^{م} كما تقدم بالتعويض مثال

ب^{٤} + ٣^{٤} على ب — ٣ = ب^{٣} + ٣ ب^{٢} + ٣^{٢}ب + ٣^{٣} والباقي ٢ × ٣^{٤}

ب^{٥} + د^{٥} على ب — د = ب^{٤} + د ب^{٣} + د^{٢}ب^{٢} + د^{٣}ب + د^{٤} والباقي ٢ د^{٥}

وحدود الخارج من ذلك ايجابية ايضاً وهي سلسلة قوات منظمة درجتها ايضاً اقل من درجة المقسوم بواحد

نظرية في القسمة على مجتمع كميتين

(٥٩) يعرف ايضاً قبل اجراء العمل امكان هذه القسمة تماماً ام عدمه لنقسم م على ب + د وليكن الخارج ج والباقي ق (٥٦ تنبيه)

م = (ب + د) ج + ق او

م — (ب + د) ج = ق

لنعوض عن ب بالآ دال (— د) فيحصل (— د + د) = ٠ وحاصلها في ج صفر اذاً م = ق

اي ان الباقي يساوي المقسوم بعد ابدالنا فيه الكمية الاولى بالكمية الثانية منفية

مثاله $ب^{٤} - ب^{٣} - ٢ب^{٢} + ب + ١$ على $ب + ٢$

الباقي $٢^{٤} + ٢^{٣} - ٢ \times ٢^{٢} - ٢ + ١ = ١٥$

فلنا مما ذكر اذا عدل المقسوم صفرًا بعد التعويض فيه عن الكمية الاولى من المقسوم عليه بالكمية الثانية منفية فهو يقبل الانقسام على مجتمعهما والا فلا

نتيجة ١ مجتمع قوتين متشابهتين وتريتين لكميتين ينقسم على مجتمعهما

اي $ب^{م} + د^{م}$ على $ب + د$ ينقسم تمامًا بفرض م وترًا

لان الباقي بعد بالتعويض $(- د)^{م} + د^{م}$

فاذا كانت م وترًا فالباقي $- د^{م} + د^{م} = ٠$ (٤١)

واذا كانت شفعًا فالباقي $د^{م} + د^{م} = ٢ د^{م}$

$ب^{٥} + د^{٥}$ على $ب + د = ب^{٤} - ب^{٣}د + ب^{٢}د^{٢} - ب د^{٣} + د^{٤}$ الباقي ٠

$ب^{٤} + د^{٤}$ على $ب + د = ب^{٣} - ب^{٢}د + ب د^{٢} - د^{٣}$ والباقي $٢ د^{٤}$

والخارج فيهما سلسلة قوات اولها ايجابي والثاني سلبي وهكذا على الترتيب

نتيجة ٢ فضلة قوتين متشابهتين شفعيتين لكميتين تنقسم على مجتمعهما

اي $ب^{م} - د^{م}$ على $ب + د$ تنقسم تمامًا بفرض م شفعًا

لان الباقي بعد التعويض $(- د)^{م} - د^{م}$

فاذا كانت م شفعًا فالباقي $د^{م} - د^{م} = ٠$ (٤١)

واذا كانت م وترًا فالباقي $- د^{م} - د^{م} = - ٢ د^{م}$

$ب^{٤} - د^{٤}$ على $ب + د = ب^{٣} - ب^{٢}د + ب د^{٢} - د^{٣}$

$ب^{٣} - د^{٣}$ على $ب + د = ب^{٢} - ب د + د^{٢}$ والباقي $- ٢ د^{٣}$

والخارج فيهما كما ترى سلسلة قوات اولها ايجابي والثاني سلبي والخ على الترتيب

تمرين

ما هو الخارج والباقي من قسمة

(١) ٢ س^{٣} — ٣ س^{٢} + ٢ س — ٥ على س + ٤

(٢) ٢ د^{٣} — ٤ د^{٢} — ٥ د + ٤ على د — ٣

(٣) (ك^{٥} — ب^{٥}) ÷ (ك — ب)

(٤) (ك^{٤} — ب^{٤}) ÷ (ك + ب)

(٥) (م^{٥} + ١) ÷ (م + ١)

(٦) (س^{٤} + هـ^{٤}) ÷ (س — هـ)

(٧) (٨ ك^{٣} — د^{٣}) ÷ (٢ ك + د)

الحل الى اضلاع

(٦٠) الحل الى ضلعين او اكثر هو فك الحاصل وارجاعه الى مضاربيه الاصلية فكل مضروب هو ضلع من الحاصل مثاله ٣ ك = ٣ × ك فكل من ٣ و ك هو ضلع من ٣ ك

وعلى ذلك نورد بعض الامثلة مثالاً لغيرها

(١) ٣ م ب س = ٣ × م × ب × س
— ٤ ك ل = — ٤ × ك × ل

(٢) ب ك — ٢ ك^{٢} + ٣ م ك = ك (ب — ٢ ك + ٣ م)

(٣) س^{٢} — م^{٢} = (س + م) × (س — م) نظرية ١

(٤) (س^{٢} + ٢ س م + م^{٢}) = (س + م) × (س + م) نظرية ٢

(٥) س^{٢} — ٢ س م + م^{٢} = (س — م) × (س — م) نظرية ٣

(٦) ب^{٥} — م^{٥} = (ب — م) (ب^{٤} + ب^{٣} م + ب^{٢} م^{٢} + ب م^{٣} + م^{٤}) ٥٨ نتيجة ١

(٧) ٣٢ د^{٥} + م^{٥} ب^{٥} = (٢ د + م ب) (١٦ د^{٤} — ٨ د^{٣} م ب + ٤ د^{٢} م^{٢} ب^{٢} — ٢ د م^{٣} ب^{٣} + م^{٤} ب^{٤}) (٥٩ نتيجة ١)

(٨) ن^{4} — ١٦ = (ن + ٢) (ن^{3} — ٢ ن^{2} + ٤ن — ٨) (٥٩ن٢)

لنا من ذلك القواعد الاتية

اولاً الحد البسيط ينفك الى اضلاع قدر عدد كمياته او عدد قواتها مثاله
٣ م^{2}ب^{2}س = ٣ × م^{2} × ب^{2} × س = ٣ × م × م × ب × ب × س

تنبيه : الحد الايجابي يحل الى اضلاع كلها ايجابية او يجعل زوج او اكثر منها سلبياً والحد السلبي يحل الى اضلاع واحد منها فقط منفي ويمكن ان تجعل اضلاع منه منفية شرط ان يكون عددها وتراً

مثاله ب ك ل = ب × ك × ل او — ب × — ك × ل

— د م^{2} ن = — د × — م × — م × ن

ثانياً تؤخذ القوة المشتركة بين جميع الحدود ضلعاً وما يخرج من القسمة عليها ضلعاً اخر مثال ٢

٢ ب^{3} س + ٤ ب^{2} س^{2} — ٨ ب س^{3} = ٢ ب س (ب^{2} + ٢ ب س — ٤ س^{2})

او — ٢ ب س (— ب^{2} — ٢ ب س + ٤ س^{2}) (٣٦ تنبيه ٢)

ثالثاً تحل فضلة مربعين الى مجتمع جذريهما وفضلتهما وذلك بمقتضى عكس النظرية الاولى في الضرب مثال (٣)

رابعاً مربع الحدين يحل الى ضلعيه المتساويين كل منهما جذر الحد الاول المالي وجذر الحد الثالث المالي مربوطين باشارة الاوسط مثال ٤ و ٥

خامساً الامثلة ٦ ، ٧ ، ٨ حلها بمقتضي النتائج المذكورة انفاً في القسمة وهي فضلة قوتين متشابهتين احد ضلعيها فضلة جذريهما

مجتمع قوتين وتريتين متشابهتين احد ضلعيه مجتمع جذريهما

فضلة قوتين متشابهتين شفعيتين احد ضلعيها مجتمع جذريهما ايضاً

ملاحظة ١ — قد تكون حدود العبارة او بعضها مرتبطة بعلامات الحصر فينبغي بسطها ثم حلها الى اضلاع

مثلاً (ك — ٢) (ى + ٢) — (ى — ٢) (ك + ٢) فبفك الحصر

= ك ى + ٢ ك — ٢ ى — ٤ — ى ك — ٢ ى + ٢ ك + ٤ وبالاصلاح

= ٤ ك — ٤ ى وعند ذلك تحل الى

٤ (ك — ى) فانتبه

ملاحظة ٢ . — قد تحل عبارة جبرية الى ضلعين ثم يحل كل منهما او احدهما

مثاله حل ٤ ب^{٢} س^{٢} — (ب^{٢} + س^{٢} — د^{٢})^{٢} الى اضلاع

هذه العبارة هي فضلة حدين مربعين وبمقتضى الحالة الثالثة تحل الى

٢ ب س + (ب^{٢} + س^{٢} — د^{٢}) و ٢ ب س — (ب^{٢} + س^{٢} — د^{٢})

بفك الحصر فيهما وترتيب الحدود

ب^{٢} + ٢ ب س + س^{٢} — د^{٢} و د^{٢} — ب^{٢} + ٢ ب س — س^{٢}

باخذ مربع حدين على حدة

(ب + س)^{٢} — د^{٢} و د^{٢} — (ب^{٢} — ٢ ب س + س^{٢})

ايضاً في الثانية

(ب + س)^{٢} — د^{٢} و د^{٢} — (ب — س)^{٢}

بمقتضى الحالة الثالثة

الاول يحل الى (ب + س + د) (ب + س — د)

والثاني الى (د + ب — س) (د + س — ب)

ملاحظة ٣ . — يسهل حل عبارة مركبة من ثلاثة حدود منتظمة بتفريق الحد الاوسط الى جزئين وذلك كما يأتي (الضرب نظرية ٤)

اذا كان الحد الاخير ايجابياً فرق الحد الاوسط الى مجتمع جزئين واعطها اشارة الاوسط

اذا كان الحد الاخير سلبياً فرق الحد الاوسط الى فضلة جزئين

واعط اكبرها فقط اشارة الاوسط

مثلاً ك^{٢} − ٣ ك + ٢ = ك^{٢} − ٢ ك − ك + ٢

= ك (ك − ٢) − (ك − ٢) = (ك − ١) (ك − ٢)

ك^{٢} + ٤ ك + ٣ = ك^{٢} + ٣ ك + ك + ٣

= ك (ك + ٣) + (ك + ٣) = (ك + ١) (ك + ٣)

ك^{٢} + ٧ ك − ١٨ = ك^{٢} + ٩ ك − ٢ ك − ١٨

= ك (ك + ٩) − ٢ (ك + ٩) = (ك − ٢) (ك + ٩)

ك^{٢} − ٧ ك − ١٨ = ك^{٢} − ٩ ك + ٢ ك − ١٨

= ك (ك − ٩) + ٢ (ك − ٩) = (ك − ٩) (ك + ٢)

وترى في جميعها ان حاصل مسمي الجزئين يساوي حاصل مسمى الحد الاول في الحد الاخير وعليه

١٢ ك^{٢} − ٣١ ك + ٢٠ = ١٢ ك^{٢} − ١٦ ك − ١٥ ك + ٢٠

= ٤ ك (٣ ك − ٤) − ٥ (٣ ك − ٤)

= (٤ ك − ٥) (٣ ك − ٤)

فحاصل ١٦ × ١٥ = ١٢ × ٢٠

٣ ك^{٢} + ٨ د ك − ٣ د^{٢} = ٣ ك^{٢} + ٩ د ك − د ك − ٣ د^{٢}

= ٣ ك (ك + ٣ د) − د (ك + ٣ د)

= (٣ ك − د) (ك + ٣ د)

وهنا حاصل ٩ د × د = ٣ × ٣ د^{٢}

ملاحظة ٤٠ — يسهل حل عبارة مركبة من اربعة حدود فاكثر بتفريق حد او اكثر منها ويشترط في التفريق اضافة كمية وعكسها ومناسبة الحدود للقسمة على كمية مركبة من ضلع الحد الاول وضلع الحد الاخير من العبارة المفروضة مثلاً ك^{٣} + ك^{٢} − ٩ ك + ٦

خذ ك ضلع ك^{٢} و ٢ ضلع ٦ وفرق الحدود الوسطى حتى نقسم على ك — ٢

ك^{٣} — ٢ ك^{٢} + ٣ ك — ٦ ك — ٣ ك + ٦ = ك^{٢}(ك — ٢)

+ ٣ ك (ك — ٢) — ٣ (ك — ٢) = (ك^{٢} + ٣ ك — ٣) (ك — ٢)

اما تعيين قسمة هذه العبارات على ك — ٢ او ك + ٢ او ك — ٣ او ك + ٣ فمقصور على كثرة الممارسة وعلى التجربة احيانًا بالتعويض حسب (٥٨ و ٥٩)

تمرين

حل ما يأتي الى اضلاع

(١) ب د^{٢} ، (٢) — ٣ م^{٢}ن^{٢} هـ (٣) — ٥ ك^{٢}ب دس

(٤) ٨ ل^{٢}ن^{٢} ، (٥) ٨ ك ل + ٤ ك م + ٤ ك د + ٤ ك^{٢}

(٦) ٥ م س — ١٥ م^{٢}س + ٢٠ م س^{٢} — ١٠ م^{٢}س^{٢}

(٧) ٣ م ن^{٢} — ٩ د ن + ١٢ ب ن^{٢} — ١٨ هـ ن

(٨) ٤ س^{٢} — ٢ س^{٣} + ٨ س^{٤} (٩) ٢٥ ك^{٢} — س^{٢}

(١٠) ٩ د^{٢}هـ^{٢} — ٤ ل^{٤} (١١) ١٦ م^{٨} — ٤

(١٢) د^{٢} + ٢ د س + س^{٢} (١٣) ب^{٢} + ب د + $\frac{د^{٢}}{٤}$

(١٤) ٩ هـ^{٢} + ٣٠ هـ + ٢٥ (١٥) ٤ د^{٢}س^{٢} + ٤ د س ف + ف^{٢}

(١٦) (ب + د)^{٢} — هـ^{٢} (١٧) هـ^{٢} — (ب — د)^{٢}

(١٨) ب^{٢} — ٢ ب م + م^{٢} (١٩) ٤ د^{٢} — ٢ د س^{٤} + س^{٨}

(٢٠) ٩ س^{٤} — ٢٤ س^{٢}هـ^{٢} + ١٦ هـ^{٦} (٢١) ك^{٢} — ٨ ك + ١٦

(٢٢) ت^{٦} — ل^{٦} (٢٣) ب^{٣} + د^{٣} (٢٤) ١٦ م^{٦} — ١٦ د^{٦}

(٢٥) (ك + ى)^{٢} — ر^{٢} (٢٦) ك (٢ ك + ١)^{٢} — ك

(٢٧) ك^{٢} + ٧ ك + ١٢ (٢٨) ك^{٢} — ٧ ك + ١٠

(٢٩) ك^{٢} — (د + س) ك + د س

(٣٠) ١٢ ك^٢ — ٢٥ ك ى + ١٢ ى^٢

(٣١) ٢٤ ك^٢ — ٢ ك — ١٥

(٣٢) ك^٢ + ٢ ك ى + ى^٢ + ك + ى

(٣٣) ك (ك^٢ + ى^٢) + ك^٣ + ى^٣

(٣٤) (ك + ى)^٢ — ك ز^٢ — ى ز^٢ الى ثلثة اضلاع

(٣٥) ك^٣ — ٨ ك^٢ + ١٩ ك — ١٢ (٣٦) ك^٨ — ١

(٣٧) ك^٢ (ك^٣ — ى^٣) — ك^٣ ى^٢ + ى^٥

(٣٨) ك^٤ + ٢ ك^٣ — ٧ ك^٢ — ٨ ك + ١٢

(٣٩) (ك — ١)^٢ (ى^٢ — ١) — (ى — ١)^٢ (ك^٢ — ١)

(٤٠) ٤ ك^٢ — ٩ س^٢ + ٢٤ س ز — ١٦ ز^٢

(٤١) ٤ ب^٢ + ٠٠ + ٤ ب د + ٢ د هـ — ٠٠ — هـ^٢

العاد الاكبر

(٦١) العاد والمعدود . — كل مضروب يعد حاصله اي يتكرر فيه مرة او اكثر فالاول ضلع من الثاني او عاد له والثاني معدود الاول

(٦٢) العاد الاكبر : هو اكبر عبارة تنقسم عليها الكميات المطلوبة تماماً اي اكبر ضلع مشترك بينها جميعها ولنا فيه ملاحظتان

ملاحظة ١ : كل كمية هي العاد الاكبر لذاتها ولا تنقسم على اكبر منها

نتيجة ١ : العاد الاكبر لكميات متساوية هو احدها

نتيجة ٢ : العاد الاكبر بين كمية واي حاصل منها هو تلك الكمية لانها تعد ذاتها وتعده فالعاد الاكبر بين س و ب س هو س وبين د^٢ — ك^٢ و د + ك هو د + ك

ملاحظة ٢ . — العاد مجتمع كميتين او فضلتهما يعد كلاً منهما (٥٤ تنبيه) اي د تعد د م ± د ن متى عدت د م و د ن

نتيجة : ليكن المقسوم عليه ع والخارج ج والباقي ب فالمقسوم = ع ج + ب والعاد الاكبر للمقسوم والمقسوم عليه ع يعد ع ج حاصلها ويجب ان يعد ب ايضاً فهو العاد الاكبر للمقسوم عليه والباقي

فلنا من ذلك هذه القاعدة : اقسم الكبرى على الصغرى ثم المقسوم عليه على الباقي وكرر العمل الى ان لا يبقى شيء فالمقسوم عليه الاخير هو العاد الاكبر بين الكميتين

مثلاً خذ العاد الاكبر بين د^{٢} + ٢ د + ١ و د^{٣} + ٢ د^{٢} + ٢ د + ١

د^{٢} + ٢ د + ١) د^{٣} + ٢ د^{٢} + ٢ د + ١ (د

د^{٣} + ٢ د^{٢} + د

الباقي والمقسوم عليه الاخير د + ١) د^{٢} + ٢ د + ١ (د + ١

د^{٢} + ٢ د + ١

قسمنا المقسوم عليه د^{٢} الخ على الباقي فلم يبقَ شيء فالعاد الاكبر هو د + ١

تنبيه يمكن ضرب احدى الكميتين او قسمتها على كمية لا تدخل في الاخرى هي او ضلعٌ منها دون ان يتغير العاد الاكبر بينهما مثلاً العاد الاكبر بين س د و س ب هو العاد الاكبر بين س و س ب وبين ح س د و س ب

مثلاً ما هو العاد الاكبر بين د^{٤} — ك^{٤} و د^{٣} — د^{٢}ك — د ك^{٢} + ك^{٣}

د^{٣} — د^{٢}ك — د ك^{٢} + ك^{٣}) د^{٤} — ك^{٤} (د + ك

د^{٤} — د^{٣}ك — د^{٢} ك^{٢} + د ك^{٣}

د^{٣} ك + د^{٢} ك^{٢} — د ك^{٣} — ك^{٤}

د^{٣} ك — د^{٢} ك^{٢} — د ك^{٣} + ك^{٤}

---

٢ د^{٢} ك^{٢} — ٢ ك^{٤}

و $٢د^٢ك - ٢ك^٣ = ٢ك(د^٢ - ك^٢)$ فيمكن اسقاط $٢ك$ منه فتقسم على $د^٢ - ك^٢$) $د^٣ - د^٢ك - دك^٢ + ك^٣$ ($د - ك$

$$\begin{array}{rr} د^٣ & - دك^٢ \\ \hline - د^٢ك & + ك^٣ \\ - د^٢ك & + ك^٣ \\ \hline ٠٠ & ٠٠ \end{array}$$

حيث لم يبق باق فالمقسوم عليه الاخير $د^٢ - ك^٢$ هو العاد الاكبر

قاعدة ٢٠ — اذا امكن حل الكميتين الى اضلاعهما بسهولة فحاصل الاضلاع المشتركة هو العاد الاكبر بينهما مثلاً

$$٢د^٢ - ٢ك^٢ = ٢(د + ك)(د - ك)$$

$$و\ ٢سد - ٢سك = ٢ \times س\ (د - ك)$$

فالعاد الاكبر بينهما هو $٢(د - ك)$ او $٢د - ٢ك$

(٦٣) اذا اردت استعلام العاد الاكبر لثلاث كميات فاكثر فخذه اولاً لاثنتين منها ثم خذ العاد الاكبر للثالثة والعاد الاكبر المأخوذ وهكذا مهما تعددت الكميات فالمقسوم عليه الاخير هو العاد الاكبر للجميع

تمرين

خذ العاد الاكبر لما يأتي

(١) ١٢٨، ١٦٨ (٢) $بك^٢$ و $ب^٢ك^٢$

(٣) ٢٥٠، ١٨٠٠٠ (٤) $دبك^٢$ و $د^٢بك$

(٥) $١٥د^٢ب^٢$ و $د^٢ب^٢$ (٦) $١٤م^٢ن^٢ب^٣$ و $٧م^٢ن^٢ب$

(٧) $٤بكى$ و $٢دسكى$

(٨) $بحد$، $بسد$، $حسد$

(٩) $بكى$، $ك^٢ى^٢$، $دبك$

(١٠) د ك + ب ك ، د ى + ب ى

(١١) ك^{٢} — د^{٢} و ك^{٢} + ٢ د ك + د^{٢}

(١٢) ٢ د^{٢} — ٢ د ب ، ٥ د^{٢} — ٥ د ب

(١٣) (ك + ى)^{٢} ، (ك — ى)^{٢}

(١٤) ك^{٢} — ٢ ك — ١ ، ك^{٢} + ٢ ك + ١

(١٥) ك^{٢} — ٧ ك + ١٠ ، ٤ ك^{٣} — ٢٥ ك^{٢} + ٢٠ ك + ٢٥

(١٦) ٢ ك^{٣} + ك^{٢} — ك + ٣ و ٢ ك^{٣} + ٥ ك^{٢} + ك — ٣

(١٧) ٤ س^{٢} + ٣ س — ١٠ و ٤ س^{٣} — ٢٥ س^{٢} + ٢٠ س + ٢٥

(١٨) ٢ ك^{٣} — ٣ ك^{٢} — ٩ ك + ٥ و ٢ ك^{٢} — ٧ ك + ٣

(١٩) ك^{٣} — ١ و ك^{٢} — ٢ ك + ١ و ك^{٢} — ١

(٢٠) د^{٢} + ٢ د ب + ب^{٢} و د^{٢} — ب^{٢} و د^{٣} + ٢ د^{٢} ب + ٢ د ب^{٢} + ب^{٣}

المعدود الاصغر

(٦٤) المعدود الاصغر لعدة كميات هو اصغر عبارة تنقسم على كلٍ منها دون باقٍ لذلك يجب ان تكون تلك الكميات داخلة فيه (٥٣ ، ٥٤ تنبيه) ومن اضلاعه وعادة له (٦١) فلنا فيه هذه الملاحظة : كل ضلع مشترك في اثنتين او اكثر من الكميات المفروضة يكفي دخوله مرة واحدة في المعدود مثلاً في د ب   د س   ب ح يكفي دخول د ، ب مرة في المعدود فيكون د ب س ح

نتيجة ١ . — المعدود الاصغر للكميات المتساوية هو احدها ولكميات متداخلة اي تعد بعضها هو اكبرها ولكميات متباينة لا عاد مشترك لها هو حاصلها مثلاً معدود س و س هو س

معدود ب ، ب س ، ب س ح الاخيرة ومعدود ب ، س ، د هو ب س د

نتيجة٢ : في كميات متوافقة اي تدخل فيها اضلاع مشتركة وخاصة لنا هذه القاعدة

خذ كميتين واقسم احداهما على العاد الاكبر بينهما واضرب الخارج في الثانية فالحاصل هو المعدود الاصغر لهما ثم خذ المعدود الاصغر لهذا المعدود والكمية الثالثة بذات الطريقة وهكذا الى الاخيرة فالاخير هو المعدود الاصغر للجميع

مثلاً نستعلم المعدود الاصغر للكميات دب د س س ح هكذا العاد الاكبر بين(١)و (٢) د فالمعدود الاصغر $\frac{\text{د ب}}{\text{د}}$ × د س = ب د س

العاد الاكبر بين س ح و ب د س هو س فالمعدود الاصغر $\frac{\text{س ح}}{\text{س}}$ × ب د س = ح ب د س

مثال اخر ما هو المعدود الاصغر بين (د + ١)٢ و د٣ + ٢ د٢ + ٢ د + ١ العاد الاكبر هو د + ١ اقسم (د + ١)٢ عليه فالخارج (د + ١) فالمعدود الاصغر (د+١) (د٣+٢د٢+٢د+١)=د٤+٣د٣+٤د٢+٣د+١

طريقة ثانية : حل الكميات الى اضلاعها وخذ من الاضلاع المشتركة في كميتين او اكثر واحدًا واحدًا ثم خذ حاصلها واضربه في الاضلاع الخاصة الباقية فيحصل المعدود الاصغر

مثلاً ٢ د ٦ د٢ب ٣ ب٢ (ب + ى)

= ٢ د ٢ د × د × ٣ب ٣ ب × ب٢ (ب + ى)

فالاضلاع المشتركة ٢ د ، ٣ ب والخاصة الباقية بعد القسمة عليها او اسقاطها ١ ، د ، ب٢ (ب + ى)

فالمعدود الاصغر ٢ د × ٣ ب × د × ب٢ (ب+ى) = ٦ د٢ب٢ (ب+ى)

تنبيه : كل ضلع يتكرر في كمية واحدة نظير د يجب تكراره في المعدود

تمرين

خذ المعدود الاصغر لما يأتي

(١) ١٧٢٨ ، ٧٢٠   (٢) ٢٤ ، ٤٨٠   ٨٤٠

(٣) دك ، ب ك

(٤) (١ + د) ، (١ — د) ، (١ + د + د^{٢}) ، (١ + د + د^{٢})

(٥) د ب   ب س   س ح

(٦) ١ — ك ، ١ + ك ، ١ — ك^{٢} ، ١ — ٢ ك + ك^{٢}

(٧) ب^{٢} س^{٢} ، ٢ د س

(٨) ٢ + ٣ د + د^{٢} و ١٢ (د + ١) و ٤ (د + ٢)

(٩) ٢ ب س ، ٦ ب^{٢} س^{٢}

(١٠) ك^{٢} — ٧ ك — ٦ ، ك^{٢} — ٢ ك — ٣ ، ك^{٢} — ك — ٦

(١١) ن^{٢} + ن ى ، ٣ ن ى

(١٢) ٨ ل^{٢} — ١٤ ل + ٦ ، ٤ ل^{٢} + ٤ ل — ٣ ، ٤ ل^{٢} + ٢ ل — ٦

(١٣) ح^{٣} — د^{٢}ح — د ح^{٢} + د^{٣} ، ح^{٤} — د^{٤} ، د ح^{٣} + د^{٣}ح — د^{٢}ح^{٢} — د^{٤}

(١٤) د^{٣} + د^{٢} + د + ١ ، د^{٣} — د^{٢} + د — ١   د (د^{٢} + ١)

الباب الثالث

في الكسور الجبرية وعملياتها

الفصل الاول

في الكسر وخاصياته

(٦٥) الكسر عبارة عن مقسومين احدهما صورة والاخر مخرج وقيمته هي الخارج من قسمة الصورة على المخرج وتكون ايجابية او سلبية وتعدل عددًا تامًا او كسرًا مثاله ب/د فالمراد من هذا الكسر قسمة ب الى اقسام قدر د ثم لتكن ب = ١/٣ د = ٤ فقيمته ١/٣ ÷ ٤ = ١/١٢

لتكن ب = — ٦ د = ٢/٣ فقيمته — ٦ ÷ ٢/٣ = — ٩

(٦٦) علامة الخارج تتغير بتغير اشارة احد المقسومين وتبقى على حالها بتغيرها فيهما فقيمة الكسر تتغير من + الى — او بالعكس اذا تغيرت علامات الصورة او المخرج وتبقى على حالها اذا تغيرت في كليهما

(ب د — س د)/(ب — س) = د (س د — ب د)/(س — ب) = د تغيرت فيهما

(س د — ب د)/(ب — س) = — د (ب د — س د)/(س — ب) = — د في احدهما

(٦٧) العلامة المتقدمة على الكسر تفيد جمع الخارج او طرحه والكسر معها نظير كمية محصورة فاذا اريد تغيير العلامة المذكورة وجب تغيير علامات الصورة او المخرج

$$\frac{\text{ب}-\text{س}}{\text{د}-\text{ح}} = -\frac{\text{س}-\text{ب}}{\text{د}-\text{ح}} \;\text{او}\; -\frac{\text{ب}-\text{س}}{\text{ح}-\text{د}}$$

(٦٨) للكسور الجبرية خاصيات الكسور الحسابية ذاتها وهي

خاصية ١ : ضرب صورة الكسر وحدها بكمية كضرب قيمته فيها مثلا

$$\frac{\text{ب د}}{\text{ب}} = \text{د} \qquad \frac{\text{ك}\times\text{ب د}}{\text{ب}} = \text{ك}\times\text{د} \quad \text{او}\; \text{ك}\times\frac{\text{ب د}}{\text{ب}}$$

كذا ليكن $\frac{\text{ه}}{\text{ل}} = \text{م}$ فيكون $\frac{\text{س ه}}{\text{ل}} = \text{س م}$ او $\text{س}\times\frac{\text{ه}}{\text{ل}}$

البرهان : $\frac{\text{ه}}{\text{ل}} = \text{م}$ (بموجب ٤٧) $\text{ه} = \text{ل م}$ اذاً $\text{س ه} = \text{س ل م}$ (اولية ٥)

وبالقسمة على ل $\frac{\text{س ه}}{\text{ل}} = \text{س م}$ (اولية ٦) وهو المطلوب

خاصية ٢ : قسمة صورة الكسر وحدها على كمية كقسمة قيمته عليها مثلاً

$\frac{\text{ك ب د}}{\text{ب}} = \text{ك د}$ و $\frac{\text{ب د}}{\text{ب}} = \text{د}$ وظاهر ان ك د قسمت على ك ايضاً

كذا ليكن $\frac{\text{ه}}{\text{ل}} = \text{م}$ فيكون $\frac{\frac{\text{ه}}{\text{س}}}{\text{ل}} = \frac{\text{م}}{\text{س}}$ البرهان

اضرب الطرفين اي قيمتي الكسرين او صورتيهما في س (خاصة ١)

$\frac{\frac{\text{ه}}{\text{س}}\times\text{س}}{\text{ل}} = \frac{\text{م}}{\text{س}}\times\text{س}$ اي $\frac{\text{ه}}{\text{ل}} = \text{م}$ حسب المفروض

خاصية ٣ : ضرب مخرج الكسر وحده في كمية كقسمة قيمته عليها مثلاً

$\frac{\text{د ب ك}}{\text{ب}} = \text{د ك}$ و $\frac{\text{د ب ك}}{\text{ب ك}} = \text{د}$ فالخاصة ظاهرة كذا $\frac{\text{ه}}{\text{ل}} = \text{م}$ $\frac{\text{ه}}{\text{ل س}} = \frac{\text{م}}{\text{س}}$

البرهان ليكن $\frac{ه}{ل} = م$ او $ه = ل م$ بقسمة الطرفين على ل س (اولية٦)

$\frac{ه}{ل س} = \frac{ل م}{ل س} = \frac{م}{س} = \frac{ه}{ل} \div س$ وهو المطلوب

خاصية٤ : قسمة مخرج الكسر على كمية كضرب قيمته فيها مثلاً

$\frac{د ب ك}{ب ك} = د = \frac{د ب ك}{ب} = د ك$ وهو ظاهر كذا $\frac{ه}{ل} = م$ اذاً $\frac{ه}{\frac{ل}{س}} = م س$

اقسم الطرفين اي الكسر وقيمته على س ولتكن قسمة الكسر بضرب مخرجه حسب خاصية٣

$\frac{ه}{\frac{ل}{س} \times س} = م$ وبموجب خاصة ٢ $\frac{ه}{ل} = م$ حسب الفرض

نتيجة : (خاصية ١) $\frac{س ه}{ل} = س م = \frac{ه}{\frac{ل}{س}} = س م$ خاصية(٤)

(خاصية ٢) $\frac{\frac{ه}{س}}{ل} = \frac{م}{س} = \frac{ه}{س ل} = \frac{م}{س}$ خاصية(٣)

فينتج ان ضرب الصورة كقسمة المخرج وقسمة الصورة كضرب المخرج وبالعكس

خاصية٥ : اذا ضربت صورة الكسر ومخرجه في كمية واحدة او قسما عليها لا تتغير قيمته مثلاً

ليكن $ك = ل م$ و $ب ك = ب ل م$ فلنا منهما (اولية ٦)

$\frac{ك}{ل} = م$ $\frac{ب ك}{ب ل} = م$ اي $\frac{ب ك}{ب ل} = \frac{ك}{ل}$ (اولية ١)

لو ضرب حدا الكسر الثاني في ب او قسم حدا الاول عليها كانت لهما ذات القيمة

نتيجة ١ : يختزل الكسر اي يختصر بقسمة حديه على كمية واحدة

مثال ١
$$\frac{\text{١٨ د}^{\text{٣}}\text{ ب}^{\text{٤}}\text{ ه ل}}{\text{٩ د}^{\text{٢}}\text{ ب}^{\text{٣}}\text{ ه م}} = \frac{\text{٢ د ب ل}}{\text{م}}$$

وذلك بقسمة الصورة والمخرج على ٩ $\text{د}^{\text{٢}}\text{ب}^{\text{٣}}$ ه العاد الاكبر

مثال ٢
$$\frac{\text{٢ د}^{\text{٢}}}{\text{٤ د}^{\text{٢}}+\text{٢ د ب}} = \frac{\text{٢ د} \times \text{د}}{\text{٢د (٢د + ب)}} = \frac{\text{د}}{\text{(٢د + ب)}}$$

مثال ٣
$$\frac{\text{٢ ك}^{\text{٤}}-\text{٢ د}^{\text{٤}}}{(\text{ك}^{\text{٢}}+\text{د}^{\text{٢}})(\text{ك}-\text{د})^{\text{٢}}} = \frac{\text{٢}(\text{ك}^{\text{٢}}+\text{د}^{\text{٢}})(\text{ك}^{\text{٢}}-\text{د}^{\text{٢}})}{(\text{ك}^{\text{٢}}+\text{د}^{\text{٢}})(\text{ك}-\text{د})^{\text{٢}}}$$

$$= \frac{\text{٢}(\text{ك}^{\text{٢}}+\text{د}^{\text{٢}})(\text{ك}+\text{د})(\text{ك}-\text{د})}{(\text{ك}^{\text{٢}}+\text{د}^{\text{٢}})(\text{ك}-\text{د})(\text{ك}-\text{د})} = \frac{\text{٢}(\text{ك}+\text{د})}{\text{ك}-\text{د}}$$

مثال ٤
$$\frac{\text{ل}^{\text{٣}}-\text{ل}^{\text{٢}}\text{م}-\text{ل م}^{\text{٢}}+\text{م}^{\text{٣}}}{\text{ل}^{\text{٤}}-\text{م}^{\text{٤}}} = \frac{\text{ل}^{\text{٢}}(\text{ل}-\text{م})-\text{م}^{\text{٢}}(\text{ل}-\text{م})}{(\text{ل}^{\text{٢}}+\text{م}^{\text{٢}})(\text{ل}^{\text{٢}}-\text{م}^{\text{٢}})}$$

$$= \frac{(\text{ل}^{\text{٢}}-\text{م}^{\text{٢}})(\text{ل}-\text{م})}{(\text{ل}^{\text{٢}}-\text{م}^{\text{٢}})(\text{ل}^{\text{٢}}+\text{م}^{\text{٢}})} = \frac{\text{ل}-\text{م}}{\text{ل}^{\text{٢}}+\text{م}^{\text{٢}}}$$

مثال ٥
$$\frac{\text{ك}^{\text{٢}}+\text{١٢ك}+\text{٣٥}}{\text{٩ك}^{\text{٣}}+\text{٦٢ك}^{\text{٢}}-\text{١٠ك}-\text{٢١}} = \frac{\text{ك}^{\text{٢}}+\text{٧ك}+\text{٥ك}+\text{٣٥}}{\text{٩ك}^{\text{٣}}+\text{٦٣ك}^{\text{٢}}-\text{ك}^{\text{٢}}-\text{٧ك}-\text{٣ك}-\text{٢١}}$$

$$= \frac{(\text{ك}+\text{٥})(\text{ك}+\text{٧})}{(\text{٩ك}^{\text{٢}}-\text{ك}-\text{٣})(\text{ك}+\text{٧})} = \frac{\text{ك}+\text{٥}}{\text{٩ك}^{\text{٢}}-\text{ك}-\text{٣}}$$

نتيجة ٢ : يمكن تحويل عدة كسور الى مخرج مشترك دون تغيير قيمتها

وقاعدته : اضرب حدي كل كسر في حاصل مخارج غيره او في كمية تجعل المخرج مساوياً المعدود الاصغر للمخارج كلها

$\frac{د}{ب}$ ، $\frac{ن}{هـ}$ ، $\frac{ل}{ف}$ = $\frac{د هـ ف}{ب هـ ف}$ ، $\frac{ن ب ف}{هـ ب ف}$ ، $\frac{ل ب هـ}{ف ب هـ}$

مثال ٢ $\frac{٥}{٢ د ف^٢}$ ، $\frac{ب}{٢ د}$ ، $\frac{م}{٦ د^٢ ف^٢}$

خذ ٢ د ثم ف^٢ فيبقى ف^١ ، ٣ د فالمعدود الاصغر حاصلها ٦ د^٢ ف^٢

$\frac{٥ \times ٣ د}{٢ د ف^٢ \times ٣ د}$ ، $\frac{ب \times ٣ د ف^٢}{٢ د \times ٣ د ف^٢}$ ، $\frac{م \times ف}{٦ د^٢ ف^٢ \times ف}$ = $\frac{١٥ د}{٦ د^٢ ف^٢}$ الخ

مثال ٣ : $\frac{٥ ب}{د^٢ - ٤}$ ، $\frac{٢ م}{٢ (د + ٢)}$ ، $\frac{ك}{٤}$ ، هـ المعدود الاصغر ٤ (د^٢ − ٤)

اذا $\frac{٤ \times ٥ ب}{٤ (د^٢ - ٤)}$ ، $\frac{٢ \times ٢ م (د - ٢)}{٤ (د^٢ - ٤)}$ ، $\frac{ك (د^٢ - ٤)}{٤ (د^٢ - ٤)}$ ، $\frac{٤ (د^٢ - ٤) هـ}{٤ (د^٢ - ٤)}$

تنبيه : الصحيح هـ بمثابة كسر مخرجه واحد فقس عليه

اختزل

$\frac{٤ د^٢ م^٣ س}{٢ د م^٤ س^٢}$ ، $\frac{٥ م ف^٤ د^٣}{١٥ م^٢ ف^٤ د^٣}$ ، $\frac{١٠ ن^٤ ع^٥}{٣٠ ن^٢ ع^٦}$

$\frac{٢ (ب^٢ - ١)}{٤ (ب^٢ + ب + ١)}$ ، $\frac{١٦ د^٢ - ٢٥}{٤ د م + ٥ م}$ ، $\frac{ب^٣ + ٢٧}{٢ (ب + ٣)}$

$\frac{(ب^٢ - د^٢)}{ب^٢ + ٢ ب د + د^٢}$ ، $\frac{٨ ك^٣ - ٢٧}{١٠ ك - ١٥}$ ، $\frac{٢ (س^٤ - ١٦)}{٤ (س^٣ - ٢ س^٢ + ٤ س - ٨)}$

$\frac{١ + ك^٢}{١ + ٢ ك + ٢ ك^٢ + ك^٣}$ ، $\frac{ك^٤ - ك^٣ - ٣ ك + ٣}{٢ ك^٢ - ك - ١}$

$\frac{ب^{٥} - ٢ب^{٤} - ١٥ب^{٣}}{ب^{٤} - ٨ب^{٣} + ١٥ب^{٢}}$ $\frac{٥٦د^{٣} - ٢٨د^{٢} - ٤٢د + ١٤}{٤٣ك^{٢} - ٢٨ك - ١٤}$

جنّس اي حول الى مخرج مشترك

(١) $\frac{٢}{ك}$ $\frac{م}{٣}$ $\frac{هـ}{ف}$ (٢) $\frac{ف}{٤ل}$ $\frac{س}{٦ع}$ $\frac{م}{٨ط}$

(٣) $\frac{ص}{٢م^{٢}هـ}$ $\frac{ب}{٤م^{٢}هـ^{٢}}$ $\frac{ن}{٨م هـ^{٢}}$ (٤) $\frac{٥ف+١}{ب^{٢}+٢ب}$ $\frac{٦م^{٢}+١}{ب+٢}$ $\frac{د-٢}{ب}$

(٥) $\frac{٨س}{٤د^{٢}-٩}$ $\frac{٣ل}{٢د+٣}$ $\frac{هـ}{٢د-٣}$ (٦) $\frac{د}{س^{٢}+٤س+٢}$ $\frac{٢ب}{س+٢}$ $\frac{٣هـ}{٥د}$

(٧) $\frac{د}{س^{٢}-ب^{٢}}$ $\frac{ل}{ب^{٢}-س^{٢}}$ $\frac{هـ}{س^{٢}+ب س+ب^{٢}}$

الفصل الثاني

في جمع الكسور وطرحها

(٦٩) الكسور نظير الكميات الصحيحة تجمع بربطها وعلاماتها وتطرح بتبديل اشارة المطروح ثم جمعه الى المطروح منه (٣٤ و ٣٦)

اجمع $\frac{ب}{ك}$ و $\frac{د}{هـ}$ و $-\frac{ن}{ل}$ الجواب $\frac{ب}{ك} + \frac{د}{هـ} - \frac{ن}{ل}$

اطرح $-\frac{ف}{ب}$ من $\frac{د}{ل} = \frac{د}{ل} + \frac{ف}{ب}$ $\frac{ب}{ن}$ من $\frac{ب}{هـ} = \frac{ب}{هـ} + \frac{-ب}{ن}$

$\frac{هـ}{د-ل}$ من $\frac{ب}{ل-د} = \frac{ب}{ل-د} + \frac{هـ}{ل-د}$ بتغيير علامة الكسر وصورته او مخرجه

(٧٠) علمت ان الكسور المتقدمة عليها اشارة الجمع فقط يراد ضمها وصور الكسر المتحدة المخرج فقط يمكن جمعها لانها تدل على عدة الاجزاء

المأخوذة من اقسام الواحد المتساوية فلنا هذه القاعدة لاصلاح الكسور اي تحويلها الى كسر اوحد واحد

حول اشارات الكسور السلبية الى ايجابية (٦٧) ثم جنّس الكسور اذا لزم وضع مجموع الصور الجديدة على المخرج المشترك فما كان فهو الجواب

$$\frac{٥}{٧}+\frac{١}{٧}=\frac{٦}{٧} \qquad \frac{٢}{٥}-\frac{١}{١٠}=\frac{٤}{١٠}+\frac{-١}{١٠}=\frac{٣}{١٠}$$

$$\frac{\text{ب}}{\text{د}}+\frac{\text{س}-\text{ب}}{\text{د}}-\frac{\text{س}-\text{ه}}{\text{د}}=\frac{\text{ب}}{\text{د}}+\frac{\text{س}-\text{ب}}{\text{د}}+\frac{\text{ه}-\text{س}}{\text{د}}=\frac{\text{ه}}{\text{د}}$$

$$\text{د}+\frac{\text{ي}}{\text{ف}}-\frac{\text{ه}-١}{\text{ن}}=\frac{\text{دفن}}{}+\frac{\text{ين}}{\text{فن}}+\frac{\text{ف}(١-\text{ه})}{}$$

من $\frac{\text{ه}+٣\text{ب}}{٤\text{ب}}$ اطرح $\frac{٣\text{ه}-٢\text{ب}}{٣\text{ب}}$ المخرج المشترك ١٢ ب

الجواب $\frac{٣(\text{ه}+٣\text{ب})}{١٢\text{ب}}+\frac{٤(٢\text{ب}-٣\text{ه})}{١٢\text{ب}}=\frac{١٧\text{ب}-٩\text{ه}}{١٢\text{ب}}$

$$\frac{٢\text{دس}-٣\text{د}^٢}{\text{س}^٢-\text{د}^٢}-\frac{٢\text{د}}{\text{د}+\text{س}}=\frac{٣\text{د}^٢-٢\text{دس}}{\text{د}^٢-\text{س}^٢}+\frac{-٢\text{د}(\text{د}-\text{س})}{\text{د}^٢-\text{س}^٢}=\frac{\text{د}^٢}{\text{د}^٢-\text{س}^٢}$$

من $\frac{٢}{\text{ب}^٣+\text{ب}^٢+\text{ب}+١}$ اطرح $\frac{٢}{\text{ب}^٣-\text{ب}^٢+\text{ب}-١}$ المخرج المشترك $\text{ب}^٤-١$

$$\frac{٣(\text{ب}-١)}{\text{ب}^٤-١}+\frac{-٢(\text{ب}+١)}{\text{ب}^٤-١}=\frac{\text{ب}-٥}{\text{ب}^٤-١}$$

تمرين

اجمع $\frac{٥\text{د}}{٧\text{ب}}+\frac{٤\text{س}-\text{د}}{٢١\text{ب}}$ (٢) $\frac{٣}{١+\text{د}^٢}+\frac{\text{د}-٢}{١-\text{د}+\text{د}^٢}$

(٣) $\frac{\text{ن د + ب ه}}{\text{ب ه}} + \frac{\text{ن د − ه م}}{\text{ه م}}$ (٤) $\text{٤ ط} - \frac{\text{٣ ط − ى}}{\text{٢}}$

(٥) $\frac{\text{٢}}{\text{ب ى}}$ و $\frac{\text{١}}{\text{ب}^{٢}}$ و $\frac{\text{١}}{\text{ى}^{٢}}$ (٦) $\frac{\text{ب}}{\text{د}}$ و $\frac{\text{٢ ب}}{\text{د ه}}$ و $\frac{\text{٣ ب}}{\text{د ه س}}$

(٧) $\frac{\text{د − ب}}{\text{د ب}}$ و $\frac{\text{ب − س}}{\text{ب س}}$ و $\frac{\text{س − د}}{\text{د س}}$ (٨) $\frac{\text{ك}}{\text{د + ك}}$ و $\frac{\text{د}}{\text{د − ك}}$ و ٢

(٩) $\frac{\text{د}}{\text{١ + ك}}$ و $\frac{\text{ك − ٢ د}}{\text{١ − ك + ك}^{٢}}$

(١٠) $\frac{\text{ب}}{\text{ك}^{٢}\text{ + ٣ ك + ٢}}$ و $\frac{\text{ب}}{\text{ك + ١}}$ و $\frac{\text{ب}}{\text{ك + ٢}}$

(١١) اطرح $\frac{\text{٧ د}}{\text{٨}}$ من د (١٢) $\frac{\text{١٠ ب + ١٧}}{\text{١٨}}$ من $\frac{\text{٨ ب + ٨}}{\text{٩}}$

(١٣) من $\left(\frac{\text{٢ د + ب}}{\text{٥}} + \text{١}\right)$ اطرح $\frac{\text{٣ ب + د + ١٣}}{\text{١٠}}$

(١٤) $\frac{\text{٣}}{\text{س}} - \left(\frac{\text{٢}}{\text{س}} + \frac{\text{٤}}{\text{س}}\right)$ (١٥) $\frac{\text{ب − د}}{\text{ب + د}}$ من $\frac{\text{ب + د}}{\text{ب − د}}$

(١٦) $\frac{\text{٢}}{\text{١ + ك}}$ من $\frac{\text{٣ + ٢ ك}}{\text{١ + ك}^{٢}\text{ + ٢ ك}}$

(١٧) $\frac{\text{١}}{\text{س − ١}} - \frac{\text{١}}{\text{٢ (س + ١)}} - \frac{\text{س + ٣}}{\text{٢ (س}^{٢}\text{ + ١)}}$

(١٨) $\text{ف}^{٢} - \frac{\text{(ف − د)}^{٢}\text{ف}^{٢}}{\text{(ف + د)}}$

$$(١٩)\quad \frac{١}{\text{٢ د} - ١} - \left[\frac{\text{٢ د}}{(\text{٢ د} - ١)^{٢}} + \frac{١}{(\text{٢ د} - ١)^{٢}} \right]$$

الفصل الثالث

في ضرب الكسور

(٧١) ضرب الكسر في الصحيح : اضرب الصورة في الصحيح واقسم الحاصل على المخرج او اقسم المخرج على الصحيح وضع الصورة على الخارج

$$\frac{\text{د}}{\text{ه}} \times \text{س} = \frac{\text{د س}}{\text{ه}} \ (\text{خاصة ١}) \qquad \frac{\text{ب}}{\text{ى ن}} \times \text{ى} = \frac{\text{ب}}{\text{ن}} \ (\text{خاصية ٤})$$

$$\frac{\text{ب}}{\text{د} - ١} \times (\text{د} - ١) = \text{ب} \qquad \frac{\text{ف}}{\text{د}^{٢} - \text{٤ س}^{٢}} \times (\text{د} - \text{٢س}) = \frac{\text{ف}}{\text{د} + \text{٢س}}$$

تنبيه : اذا ضرب الكسر فيما يساوي المخرج يسقط مخرجه (مثال٣)

$$(٧٢)\ \text{حاصل}\ \frac{\text{ب}}{\text{د}} \times \frac{\text{س}}{\text{ه}} = \frac{\text{ب} \times \frac{\text{س}}{\text{ه}}}{\text{د}} = \frac{\frac{\text{ب س}}{\text{ه}}}{\text{د}} = \frac{\text{ب س}}{\text{ه د}}$$

ضربنا الكسر $\frac{\text{ب}}{\text{د}}$ او قيمته بضرب صورته في $\frac{\text{س}}{\text{ه}}$ حسب خاصة (١) ولما كانت صورة الحاصل مقسومة على ه ضربنا المخرج في ه عوض قسمة الصورة حسبما تقدم اثباته فقاعدة ضرب الكسر في الكسر

ضع حاصل الصور صورة على حاصل المخارج مثلاً

$$\frac{\text{ب}}{\text{د}} \times \frac{\text{٢م}}{\text{ه}} = \frac{\text{٢ ب م}}{\text{د ه}} \qquad \frac{\text{د}}{\text{س}} \times -\frac{\text{٢ن}}{\text{ف}} = -\frac{\text{٢ د ن}}{\text{س ف}}$$

تنبيه : يسهل اختصار العمل باختزال اية صورة مع اي مخرج كان اذا امكن مثلاً

$$\frac{٢ب}{٢د} \times \frac{ف}{٢هـ ب} \times \frac{٢د}{ف} = \frac{١}{١} \times \frac{١}{هـ} \times \frac{١}{١} = \frac{١}{هـ}$$

اختزلنا صورة الكسر الاول ومخرج الثاني ثم صورة الثاني ومخرج الثالث ثم صورة الثالث ومخرج الاول

$$\frac{د}{ن-١} \times \frac{(ن-١)^{٢}}{٢ب} \times \frac{٤ب}{٥د} = (ن-١) \times \frac{٢}{٥د} = \frac{٢(ن-١)}{٥د}$$

تمرين

اضرب $\frac{د+هـ}{ب+ف} \times \frac{ب^{٢}-ف^{٢}}{د^{٢}-هـ^{٢}} \times (د-هـ)$

(٢) $\frac{٣ن ف}{٣س-د} \times \left(\frac{س+د}{٤} - \frac{د}{٢}\right)$

(٣) $\frac{٤د^{٢}}{س^{٢}-١} \times \frac{س+١}{٤د} \times (س-١)$

(٤) $\frac{٢ك}{٢١} \times ٨٤$ (٥) $\frac{٨-٧ك}{٤\frac{١}{٢}} \times ٩$

(٦) $\frac{٣ك}{٢} \times \frac{٢ك}{٣}$ (٧) $\left(ك+\frac{١}{ك}\right)\left(ك+\frac{١}{ك}\right)$

(٨) $\left(\frac{١}{١+ب} + \frac{١}{١-ب}\right) \times (١+ب)$

(٩) $\frac{د^{٢}-دك}{ب} \times \frac{ب^{٢}}{د-ك}$ (١٠) $\left(\frac{د}{ب}+\frac{ب}{د}\right)\left(د-\frac{١}{ب د}\right)$

(١١) $\frac{د^{٢}+دس+س^{٢}}{د^{٢}-دس+س^{٢}} \times \frac{د-س}{د+س}$

(١٢) $(\text{د}^2 + \text{د} + ١)\ \left(\frac{١}{\text{د}^2} - \frac{١}{\text{د}} + ١\right)$

(١٣) $(\text{ب}^2 - ١)\ \left[\frac{\text{ب}}{\text{ب}+١} + \frac{\text{ب}}{\text{ب}-١} + ١\right]$

الفصل الرابع
في قسمة الكسر

(٧٣) لكن المطلوب قسمة $\frac{\text{ب}}{\text{د}} \div \text{هـ}$ فالخارج حسب (خاصية ٢) $\frac{\text{ب} \div \text{هـ}}{\text{د}}$ وحسب خاصية (٣) $\frac{\text{ب}}{\text{د}} \div \text{هـ} = \frac{\text{ب}}{\text{د هـ}}$ فقاعدة قسمة الكسر على الصحيح : اقسم الصورة على الصحيح وضع الخارج على المخرج او اضرب المخرج في الصحيح وضع الصورة على الحاصل

مثال ١ $\frac{١٢(\text{ب}^2 - \text{د}^2)}{٥\,\text{هـ}} \div ٦(\text{ب} + \text{د}) = \frac{٢(\text{ب} - \text{د})}{٥\,\text{هـ}}$

اخر $\frac{\text{ب} - \text{هـ}}{\text{د}} \div ٣\,\text{ب} = \frac{\text{ب} - \text{هـ}}{٣\,\text{ب د}}$

(٧٤) لكن $\frac{\text{ب}}{\text{د}} \div \frac{\text{س}}{\text{هـ}}$ فالخارج $\frac{\text{ب}}{\text{د} \times \frac{\text{س}}{\text{هـ}}}$ (خاصية ٤)

وحسب نتيجة الخاصيات $\frac{\text{ب}}{\text{د} \times \frac{\text{س}}{\text{هـ}}} = \frac{\text{ب} \div \text{س}}{\text{د} \div \text{هـ}}$ او $\frac{\text{ب} \times \text{هـ}}{\text{د} \times \text{س}}$

المطلوب قسمة الكسر $\frac{\text{ب}}{\text{د}}$ فيلزم ان نضرب مخرجه حسب (خاصية ٤) في $\frac{\text{س}}{\text{هـ}}$ ثم يصح لنا بموجب نتيجة الخاصيات ان نقسم الصورة على س عوض ضرب المخرج فيها فيكون الجواب الخارج من قسمة الصورتين على الخارج من قسمة المخرجين واما ان نضرب الصورة في هـ عوض قسمة المخرج عليها

فيكون الجواب حاصل المقسوم في مقلوب المقسوم عليه فقاعدة

قسمة الكسر على الكسر : اقسم الصورة على الصورة والمخرج على المخرج فالخارج الاول صورة جديدة والثاني مخرج جديد وان لم يمكن ذلك دون باقٍ اضرب المقسوم في مقلوب المقسوم عليه او مكفوءه فالحاصل هو الجواب   مثال ١

$$\frac{\text{٢ د ب}^{٢} - \text{٢ د ه}^{٢}}{\text{ف}^{٣} + \text{ن}^{٣}} \div \frac{\text{٢ د (ب + ه)}}{\text{ف + ن}} = \frac{\text{ب} - \text{ه}}{\text{ف}^{٢} - \text{ف ن} + \text{ن}^{٢}}$$

اخر $\frac{\text{٢ د}}{\text{٣ ك}} \div \frac{\text{ل}}{\text{م}} = \frac{\text{٢ د}}{\text{٣ ك}} \times \frac{\text{م}}{\text{ل}} = \frac{\text{٢ د م}}{\text{٣ ك ل}}$

ويبرهن عن صحة هذا القلب ايضاً ١ً بالامتحان بضرب الخارج في المقسوم عليه اي $\frac{\text{٢ د م}}{\text{٣ ك ل}} \times \frac{\text{ل}}{\text{م}} = \frac{\text{٢ د}}{\text{٣ ك}}$ المقسوم

٢ً بان ضرب المقسومين في مقلوب المقسوم عليه يجعل المقسوم عليه واحداً

مثلاً $\left(\frac{\text{٢ د}}{\text{٣ ك}} \times \frac{\text{م}}{\text{ل}}\right) \div \left(\frac{\text{ل}}{\text{م}} \times \frac{\text{م}}{\text{ل}}\right) = \frac{\text{٢ د م}}{\text{٣ ك ل}} \div \text{١}$

فيكون الخارج حاصل المقسوم الاصلي في مكفوء المقسوم عليه

(٧٥) في $\text{ب} \div \frac{\text{د}}{\text{ه}}$ الصحيح المقسوم مخرجه واحد فالجواب $\text{ب} \times \frac{\text{ه}}{\text{د}}$

فقاعدة العمل في قسمة الصحيح على الكسر :

اقسم الصحيح على الصورة واضرب الخارج في المخرج او اضرب الصحيح في المخرج واقسم الحاصل على الصورة

$$\text{٢ (ب} - \text{د)} \div \frac{\text{ب} - \text{د}}{\text{ه}} = \frac{\text{٢ (ب} - \text{د)}}{\text{ب} - \text{د}} \times \text{ه} = \text{٢ ه}$$

$$(د + هـ) \div \frac{ب}{د - هـ} = \frac{د^2 - هـ^2}{ب}$$

(٧٦) اذا وجد في احد حدي الكسر كسرٌ يمكن نقله الى الحد الاخر اما بهيئته بتغيير اشارته من ÷ الى × او بالعكس لان ضرب الواحد كقسمة الاخر واما مكفوًّا بعلامته الاصلية

$$\frac{ن \times \frac{ب}{د}}{ى} = \frac{ن}{ى \div \frac{ب}{د}} = \frac{ن}{ى \times \frac{د}{ب}} \qquad \frac{ف \times \frac{د}{هـ}}{ن} = \frac{ف}{ن \times \frac{هـ}{د}}$$

(٧٧) اذا كان الكسر ممزوجاً اي كلا حديه او احدهما كسر فانقل مخرج كل حد الى الحد الاخر مضروباً فيه لتحوله الى هيئة كسر دارج لانه

$$\frac{\frac{ب}{د}}{\frac{هـ}{ى}} = \frac{ب}{د} \div \frac{هـ}{ى} = \frac{ب}{د} \times \frac{ى}{هـ} = \frac{ب ى}{د هـ}$$

(٧٨) اذا كان احد الحدين او كلاهما مركباً من صحيح وكسر او كسور مختلفة يجب تجنيسهما اي تحويلهما الى كسر واحد قبل العمل مثلاً

$$\frac{ن - \frac{ن - ب}{١ + ن ب}}{١ + \frac{ن(ن - ب)}{١ + ن ب}} = \frac{\frac{ن + ن^2 ب - ن + ب}{١ + ن ب}}{\frac{١ + ن ب + ن^2 - ن ب}{١ + ن ب}}$$

باصلاح صورتي الحدين وضربهما في ١ + ن ب

$$\frac{ن^2 ب + ب}{ن^2 + ١} = ب$$

تمرين

(١) $\frac{\text{٢١ د ك}}{\text{٤ ى}} + \text{٧ د}$ (٢) $\frac{\text{٢ م ن}}{\text{ب}} + \text{٣ ن}$

(٣) $\frac{\text{٥ ك ى}}{\text{د}} + \text{٣ د}$ (٤) $\frac{\text{٢ د ب س}}{\text{ن}} + \frac{\text{د س}}{\text{ن}}$

(٥) $\frac{-\text{د}^{٢}\text{ب ى}}{\text{٢ ب ه}} + \frac{\text{د ى}}{\text{ب}}$ (٦) $\text{ب} + \frac{\text{٢ ب}}{\text{ه}}$

(٧) $\frac{\text{د}^{٢} - \text{٢ ب}^{٢}\text{د} + \text{ب}}{\text{د}^{٢} - \text{ب}^{٢}} + \frac{(\text{د ب} - \text{ب}^{٢})\ \text{٢ د}}{\text{د} + \text{ب}}$

(٨) $\frac{\text{١}}{\text{١} + \frac{\text{١}}{\text{م}}}$ (٩) $\text{ب ه} + \frac{\text{١}}{\frac{\text{١}}{\text{ه}} + \frac{\text{١}}{\text{ب}}}$

(١٠) $\frac{\frac{\text{ب}}{\text{س}} + \frac{\text{د}}{\text{ه}}}{\text{١} - \frac{\text{ب د}}{\text{س ه}}}$ (١١) $\frac{\text{١} - \frac{\text{ن}^{٢}}{\text{ب}^{٢}}}{\frac{\text{١}}{\text{ب}^{٢}} - \frac{\text{ن}}{\text{ب}^{٢}}}$

(١٢) $\frac{\text{١} - \frac{\text{٣ ف}}{\text{د}} + \frac{\text{٣ ف}^{٢}}{\text{د}^{٢}} - \frac{\text{ف}^{٣}}{\text{د}^{٣}}}{\text{٢} \left(\text{١} - \frac{\text{٢ ف}}{\text{د}} + \frac{\text{ف}^{٢}}{\text{د}^{٢}}\right)}$

(١٣) $\frac{\frac{\text{١}}{\text{ب} + \text{ى}} + \frac{\text{١}}{\text{ب} - \text{ى}}}{\text{٢} - \frac{\text{ب} + \text{ى}}{\text{ب} - \text{ى}}} \times \frac{\text{١} - \frac{\text{٤ ى}}{\text{ب} + \text{ى}}}{\text{١} + \frac{\text{ب} - \text{ى}}{\text{ب} + \text{ى}}}$

الفصل الخامس

نظريات في اشكال الكسر

(٧٩) نظرية ١ . كل كسرين متساويين حاصل صورة الاول منهما في مخرج الثاني يساوي حاصل صورة الثاني في مخرج الاول

مثلاً ليكن $\frac{د}{ب}=\frac{ه}{ي}$ اضرب الطرفين في ب ى (اولية ٤)

فيكون $د ى = ب ه$

نظرية ٢ : كل كسرين متساويين يكون الخارج من صورة الاول منهما على صورة الثاني يساوي الخارج من مخرج الاول على مخرج الثاني

مثلاً ليكن $\frac{د}{ب}=\frac{ه}{ي}$ فيكون $\frac{د}{ه}=\frac{ب}{ي}$ (شكل ثان)

وذلك لانه اذا ضرب الطرفان في $\frac{ب}{ه}$ بقيت المساواة فيكون

$$\frac{د}{ب}\times\frac{ب}{ه}=\frac{ه}{ي}\times\frac{ب}{ه} \quad \text{اي} \quad \frac{د}{ه}=\frac{ب}{ي}$$

نظرية ٣ : كل كسرين متساويين مكفوآهما متساويان

ليكن $\frac{د}{ب}=\frac{ه}{ي}$ فيكون $\frac{ب}{د}=\frac{ي}{ه}$

لانه حسب (اولية ٥) $١ \div \frac{د}{ب} = ١ \div \frac{ه}{ي}$ وبالعمل $\frac{ب}{د}=\frac{ي}{ه}$

(٨٠) كل كسرين متساويين يمكن تسطيرهما على ثمانية اشكال بسيطة وهي

(١) المفروض $\frac{د}{ب}=\frac{ه}{ي}$ (٢) $\frac{د}{ه}=\frac{ب}{ي}$ نظرية ٢

مكفوآهما (٣) $\frac{ب}{د}=\frac{ي}{ه}$ (٤) $\frac{ه}{د}=\frac{ي}{ب}$ نظرية ٣

و بمبادلة الطرفين في كل منها

(٥) $\frac{ه}{ي} = \frac{د}{ب}$ (٦) $\frac{ب}{ي} = \frac{د}{ه}$

(٧) $\frac{ي}{ه} = \frac{ب}{د}$ (٨) $\frac{ي}{ب} = \frac{ه}{د}$

والنظرية الاولى ثابتة في جميعها اي $د ى = ب ه$

نظرية ٤ في كسرين او كسور متساوية مجموع الصور او فضلتها على مجموع المخارج او فضلتها (حسب ترتيب الصور) يساوي ايًا من تلك الكسور

لكن $\frac{د}{ب} = \frac{ه}{ى} = \frac{ن}{ف}$ فيكون $\frac{د + ه + ن}{ب + ى + ف} = \frac{د}{ب} =$ الخ

او $\frac{د + ه - ن}{ب + ى - ف} = \frac{د}{ب}$ الخ او $\frac{د - ه + ن}{ب - ى + ف} = \frac{ه}{ى}$ الخ

وبالاختصار $\frac{د \pm ه \pm ن}{ب \pm ى \pm ف} = \frac{د}{ب} = \frac{ه}{ى} = \frac{ن}{ف}$

البرهان لكن $\frac{د}{ب} = \frac{ه}{ي} = \frac{ن}{ف} = س$ فحسب (٤٧)

$د = ب س \quad ه = ى س \quad ن = ف س$

١ً بجمع الاطراف الاولى الى بعضها والثانية ايضًا يكون (اولية ٢)

$د + ه + ن = ب س + ى س + ف س = (ب + ى + ف) س$

وبقسمة الطرفين على كمية واحدة $ب + ى + ف$ (اولية ٥) تصير المساواة

$$\frac{د + ه + ن}{ب + ى + ف} = س \text{ او } = \frac{د}{ب} = \frac{ه}{ى} = \frac{ن}{ف}$$

٢ً بطرح طرفي الثانية والثالثة من الاولى والقسمة كما سبق

$د - ه - ن = (ب - ى - ف) س$ و $\frac{د - ه - ن}{ب - ي - ف} = س$

نتيجة $\frac{\text{د}+\text{ه}}{\text{ب}+\text{ى}}=\frac{\text{د}}{\text{ب}}$ كذا $\frac{\text{د}-\text{ه}}{\text{ب}-\text{ى}}=\frac{\text{د}}{\text{ب}}$ فبموجب (اولية ١)

$\frac{\text{د}+\text{ه}}{\text{ب}+\text{ى}}=\frac{\text{د}-\text{ه}}{\text{ب}-\text{ى}}$ وهكذا $\frac{\text{د}+\text{ه}+\text{ن}}{\text{ب}+\text{ى}+\text{ف}}=\frac{\text{د}-\text{ه}-\text{ن}}{\text{ب}-\text{ى}-\text{ف}}$

نظرية ٥ في كسرين متساويين او اكثر مجموع الصورة والمخرج او فضلتهما من كسر على احد حديه يساوي مجموع الصورة والمخرج او فضلتهما من الاخر على الحد المماثل

لكن $\frac{\text{د}}{\text{ب}}=\frac{\text{ه}}{\text{ى}}$ فيكون $\frac{\text{ب}\pm\text{د}}{\text{ب}}=\frac{\text{ى}\pm\text{ه}}{\text{ى}}$ و $\frac{\text{ب}\pm\text{د}}{\text{د}}=\frac{\text{ى}\pm\text{ه}}{\text{ه}}$

البرهان اجمع ١ الى الطرفين او اطرحها من ١ (اولية ٢ ، ٣)

$١+\frac{\text{د}}{\text{ب}}=١+\frac{\text{ه}}{\text{ى}}$ او $١-\frac{\text{د}}{\text{ب}}=١-\frac{\text{ه}}{\text{ى}}$

$\frac{\text{ب}+\text{د}}{\text{ب}}=\frac{\text{ى}+\text{ه}}{\text{ى}}$ او $\frac{\text{ب}-\text{د}}{\text{ب}}=\frac{\text{ى}-\text{ه}}{\text{ى}}$

ثانياً لنا من $\frac{\text{د}}{\text{ب}}=\frac{\text{ه}}{\text{ى}}$ الشكل $\frac{\text{ب}}{\text{د}}=\frac{\text{ى}}{\text{ه}}$ (شكل ٣)

فلو ضرب طرفا $\frac{\text{ب}\pm\text{د}}{\text{ب}}=\frac{\text{ى}\pm\text{ه}}{\text{ى}}$ في $\frac{\text{ب}}{\text{د}}=\frac{\text{ى}}{\text{ه}}$ كلٌ بما يقابله

لكان $\frac{\text{ب}\pm\text{د}}{\text{ب}}\times\frac{\text{ب}}{\text{د}}=\frac{\text{ى}\pm\text{ه}}{\text{ى}}\times\frac{\text{ى}}{\text{ه}}$

وباتمام الضرب يحصل الشكل $\frac{\text{ب}\pm\text{د}}{\text{د}}=\frac{\text{ى}\pm\text{ه}}{\text{ه}}$

نظرية ٦ في كسرين متساويين او اكثر مجتمع حدي كل واحد على فضلتهما يساوي مجتمع حدي الاخر على فضلتهما

لكن $\frac{د}{ب}=\frac{هـ}{ي}=\frac{ن}{ف}$ $\frac{د+ب}{د-ب}=\frac{هـ+ى}{هـ-ى}=\frac{ن+ف}{ن-ف}$

البرهان حسب الفرض $\frac{د}{ب}=\frac{هـ}{ي}$ او شكل ٢ $\frac{د}{هـ}=\frac{ب}{ي}$

بموجب نتيجة ٢ $\frac{د+ب}{هـ+ى}=\frac{د-ب}{هـ-ى}$ او $\frac{د+ب}{د-ب}=\frac{هـ+ى}{هـ-ى}$

نظرية ٧ اذا ضرب حدا كل كسر من الكسور المتساوية في كمية ما فمجموع حواصل الصور او فضلة بعضها من بعض على مجموع حواصل المخارج او فضلتها يساوي كلاً من تلك الكسور

لكن $\frac{د}{ب}=\frac{هـ}{ي}=\frac{ن}{ف}=$ الخ واضرب في س سَ سً الخ

فيكون $\frac{د س}{ب س}=\frac{هـ سَ}{ي سَ}=\frac{ن سً}{ف سً}=\frac{د}{ب}$ اذ لم تتغير قيمتها اصلاً

وبموجب نظرية (٤)

$$\frac{د س \pm هـ سَ \pm ن سً}{ب س \pm ى سَ \pm ف سً}=\frac{د س}{ب س}=\frac{د}{ب}=\frac{هـ}{ى}=\frac{ن}{ف}$$

نتيجة لنا من ذلك ان المجموع الاول على الثاني يساوي الفضلة الاولى على الثانية

$$\frac{د س + هـ سَ}{ب س + ي سَ}=\frac{د}{ب}=\frac{د س - هـ سَ}{ب س - ى سَ}$$

(٨١) ترى بالنتيجة ان الكسور المتساوية تتركب على اشكال مختلفة وهي

(١) $\frac{د \pm هـ}{ب \pm ى}=\frac{د}{ب}=\frac{هـ}{ى}$ (٢) $\frac{د+هـ}{ب+ى}=\frac{د-هـ}{ب-ى}$

$$(٣)\quad \frac{د \pm ب}{ب} = \frac{ه \pm ى}{ى} \qquad (٤)\quad \frac{د \pm ب}{د} = \frac{ه \pm ى}{ه}$$

$$(٥)\quad \frac{د + ب}{د - ب} = \frac{ه + ى}{ه - ى} \qquad (٦)\quad \frac{د س \pm ه سَ}{ب س \pm ى سَ} = \frac{د}{ب}$$

$$(٧)\quad \frac{د س + ه سَ}{ب س + ى سَ} = \frac{(د س - ه سَ)}{ب س - ى سَ}$$

$$(٨)\quad \frac{د س + ه سَ}{د س - ه سَ} = \frac{ب س + ى سَ}{ب س - ى سَ}$$

وهذه الاشكال المركبة تحول الى اشكال اخرى كالبسيطة مثلاً

في $\frac{ب + د}{د} = \frac{ه + ى}{ى}$

لنا $\frac{د}{ب + د} = \frac{ى}{ه + ى}$ و $\frac{ب + د}{ه + ى} = \frac{د}{ى}$ الخ

(٨٢) هذه النظريات مهمة جدًا لاختصار الكسور المتساوية اي تحويل الاشكال المركبة منها الى بسيطة مثلاً ضع في شكل بسيط

$$\frac{٢ د + ٣ ه}{٢ ب + ٣ ى} = \frac{٢ د - ٣ ه}{٢ ب - ٣ ى}$$

بما ان صورة الكسر الاول مركبة من مجتمع كميتين وصورة الاخر من فضلتهما كذلك مخرج الكسر الاول مركب من مجتمع كميتين ومخرج الاخر من فضلتهما فهي ناتجة حسب (نظرية ٤)

من $\frac{٢ د}{٢ ب} = \frac{٣ ه}{٣ ى}$ وبالاختصار فيهما $\frac{د}{ب} = \frac{ه}{ى}$

وهذا ما يظهر ايضاً باجراء العمل على طريقة اخرى وهي

لنا حسب نظرية ٢

$$\frac{\text{٢د}+\text{٣ه}}{\text{٢د}-\text{٣ه}}=\frac{\text{٢ب}+\text{٣ى}}{\text{٢ب}-\text{٣ى}}$$

وحسب نظرية ٦

$$\frac{\text{٤د}}{\text{٦ه}}=\frac{\text{٤ب}}{\text{٦ى}}\quad\text{او}\quad\frac{\text{٤د}}{\text{٤ب}}=\frac{\text{٦ه}}{\text{٦ى}}\quad\text{و}\quad\frac{\text{د}}{\text{ب}}=\frac{\text{ه}}{\text{ى}}$$

مثال ٢

$$\frac{\text{٣ف}+\text{٦ب}+\text{ه}+\text{٢د}}{\text{٣ف}-\text{٦ب}+\text{ه}-\text{٢د}}=\frac{\text{٣ف}+\text{٦ب}-\text{ه}-\text{٢د}}{\text{٣ف}-\text{٦ب}-\text{ه}+\text{٢د}}$$

هنا صورة الاول مجتمع كميتين وصورة الثاني فضلتهما وكذا المخرجان اي

$$\frac{(\text{٣ف}+\text{٦ب})+(\text{ه}+\text{٢د})}{(\text{٣ف}-\text{٦ب})+(\text{ه}-\text{٢د})}=\frac{(\text{٣ف}+\text{٦ب})-(\text{ه}+\text{٢د})}{(\text{٣ف}-\text{٦ب})-(\text{ه}-\text{٢د})}$$

فهي ناتجة بموجب نتيجة النظرية (٤) من

$$\frac{\text{٣ف}+\text{٦ب}}{\text{٣ف}-\text{٦ب}}=\frac{\text{ه}+\text{٢د}}{\text{ه}-\text{٢د}}$$

وهذه ناتجة بموجب نظرية (٦) من

$$\frac{\text{٣ف}}{\text{٦ب}}=\frac{\text{ه}}{\text{٢د}}\quad\text{وباختصارها}\quad\frac{\text{ف}}{\text{ب}}=\frac{\text{ه}}{\text{د}}$$

ويجري ايضاً العمل بطريقة اخرى وهي بموجب نظرية ٦

$$\frac{\text{٢}(\text{٣ف}+\text{ه})}{\text{٢}(\text{٦ب}+\text{٢د})}=\frac{\text{٢}(\text{٣ف}-\text{ه})}{\text{٢}(\text{٦ب}-\text{٢د})}$$

وبالقسمة على ٢ ومبادلة مخرج الاول وصورة الثاني نظرية ٢

$$\frac{\text{٣ف}+\text{ه}}{\text{٣ف}-\text{ه}}=\frac{\text{٦ب}+\text{٢د}}{\text{٦ب}-\text{٢د}}$$

ايضاً بموجب النظرية ذاتها

$$\frac{\text{٦ف}}{\text{٢ه}}=\frac{\text{١٢ب}}{\text{٤د}}\quad\text{او}\quad\frac{\text{ف}}{\text{ه}}=\frac{\text{ب}}{\text{د}}$$

تمرين

اكتب ما يأتي بالاشكال الثمانية الاولى

(١) $\frac{ب}{د} = \frac{ى}{ه}$ (٢) $\frac{د}{٦} = \frac{ف}{ن}$ (٣) $\frac{ب - س}{٥} = \frac{س}{د}$

(٤) $\frac{ف + ل}{د + ب} = \frac{ف - ل}{٢ب}$ (٥) $\frac{ب + ى}{ب - ى} = \frac{ه}{٢ف}$

(٦) $\frac{ن + د}{٢ه + ٢ل} = \frac{٣ن - د}{ه + ٣ل}$

ركب الكسور الاتية وضعها على الاشكال الثمانية الاخيرة (٨١)

(٧) $\frac{ب}{د} = \frac{ه}{ل}$ (٨) $\frac{٣ب + ه}{٢ب - ه} = \frac{د}{٥}$

(٩) $\frac{٢ب}{٣ى} = \frac{ب + ه}{٥ى - د}$ (١٠) $\frac{ه + ٣ف}{ن - د} = \frac{٣ه + ف}{٢ن + د}$

(١١) $\frac{٦م + ٣ب}{٦م - ٣ب} = \frac{٢م + ب}{٢م - ٢ب}$

(١٢) $\frac{ى^٢ + (د - ه)^٢}{(د - ه)^٢} = \frac{ب + ٢ى^٢}{٣ى^٢ + (د - ه)^٢}$

ارجع الكسور الاتية الى اشكالها البسيطة

(١٣) $\frac{د + ب}{ى + ه} = \frac{٢د - ٢ب}{٢ى - ٢ه}$

(١٤) $\frac{٥د - ٤ب}{٣ى - له} = \frac{٥د + ٤ب}{٣ى + له}$ (١٥) $\frac{٢ب + ل}{ل} = \frac{٢د + ف}{ف}$

(١٦) $\frac{٣ب + ف + س ف}{ب + ٣ف - س ف} = \frac{٣د + ه + س ه}{د + ٣ه - س ه}$

(١٧) $\frac{٣د + ه + ى ه + ٥ س}{د + ٣ه - ى ه - ٥س} = \frac{ف + ٣ب + س ف + ٥ ن}{ب + ٣ف - س ف - ٥ ن}$

(١٨) $\frac{٣ب د + ٣ب ه}{٢ب د - ه} = \frac{٢ب س + ٣ب ف}{ب س - ف}$

متفرقات : اصلح

(١٩) $\frac{١}{(س - د)(س - ن)} + \frac{١}{(د - س)(د - ن)} + \frac{١}{(ن - س)(ن - د)}$

(٢٠) $\frac{س}{(س - د)(س - ن)} + \frac{د}{(د - س)(د - ن)} + \frac{ن}{(ن - س)(ن - د)}$

(٢١) اجعل الصور $س^{١}$ ، $د^{١}$ ، $ن^{١}$ ثم اصلح

(٢٢) « « $س^{٢}$ ، $د^{٢}$ ، $ن^{٢}$ ثم اصلح

(٢٣) $\left(\frac{١}{٢س - ١}\right) - \left[\frac{٢س}{(٢س - ١)^{٢}} + \frac{١}{(٢س - ١)^{٢}}\right]^{٢}$

(٢٤) $\left(١ - \frac{ب - د}{ب + د}\right) + \left(\frac{ب + د}{ب - د} - ١\right)$

(٢٥) اختزل $\frac{ف^{٢}(ص ف - د) - ف(ص ف^{٢} - د)}{(ص ف - د) - (ص ف^{٢} - د)}$ (وجه ١٧)

(٢٦) متى يمكن اختزال $\frac{س^{م} - ل^{ه}}{س^{د} - ل^{ب}}$

افرض ف كمية ما وبرهن امكان ذلك متى كانت م = ف د ه = ف ب

(٢٧) اختزل $\frac{\text{د}^{٦} - \text{ب}^{٤}}{\text{د}^{٣} - \text{ب}}$ (٢٨) $\frac{١٢٥\,\text{ب}^{٣} - ٦٤\,\text{د}^{٦}}{٥\,\text{ب} - ٤\,\text{د}^{٢}}$

(٢٩) عدد قدره ى اضيف اليه نصفه ثم ربعه فكم صار وما هو لو فرض المجموع ٢٨

(٣٠) رجل عنده ى ديناراً فربح عشرة دنانير ثم خمس ما صار معه فكم جملة ما عنده

(٣١) سل فيه ن ليمونة اكل منها البائع خمسة ثم باع خمس الباقي فكم بقي فيه وكم كان في السل لو بقي فيه ٦٥

(٣٢) رجل راسماله ك كان يصرف منه سنوياً د غرشاً ثم يضيف عليه ثلث الباقي في نهاية السنة فكم يبلغ ما عنده بعد ٣ سنين وكم يبلغ لو فرض د = ٥٠

(٣٣) اثبت المساواة $(\text{د}^{٢} + \text{ب}^{٢})(\text{ط}^{٢} + \text{ل}^{٢}) - (\text{دط} + \text{بل})^{٢} = (\text{دل} - \text{بط})^{٢}$

(٣٤) ايضاً $(\text{ه}^{٢} + \text{س}^{٢} + \text{ف}^{٢})(\text{د}^{٢} + \text{م}^{٢} + \text{ن}^{٢}) - (\text{هد} + \text{سم} + \text{فن})^{٢} = (\text{هم} - \text{سد})^{٢} + (\text{سن} - \text{فم})^{٢} + (\text{فد} - \text{هن})^{٢}$

الباب الرابع

في التناسب والنسبة

الفصل الاول

في التناسب الحسابي

(٨٣) التناسب يكون بين كميتين متشابهتين او عددين مطلقين وهو عبارة عن تفاوتهما اما في الزيادة واما في العد فهو بهذا الاعتبار قسمان حسابي وهندسي

(٨٤) التناسب الحسابي هو فضلة الكميتين اي تفاوتهما في الزيادة وهما بمثابة مطروح ومطروح منه واشارته ‥ او — تتوسط بين المتناسبين مثاله التناسب الحسابي بين ٩ و٥ هو ٩ — ٥ = ٤ وبين ك و ل اذرع ك ‥ ل ذراعاً

(خاصية ١) ضرب حدي تناسب حسابي في كمية او قسمتهما عليها كضرب التناسب او قسمته مثلاً ليكن تناسب د ‥ ب = ن وليضرب حداه في ى كمية ما فالتناسب بين الحاصلين ى د ‥ ى ب = ى ن اي ى مرة تناسب د ‥ ب (اولية ٥)

ولو قسمنا على ى يكون التناسب بين الخارجين $\frac{د}{ى} - \frac{ب}{ى} = \frac{ن}{ى}$ (اولية ٦) اي يساوي تناسب د — ب مقسوماً على ى

مثال اخر ٩ — ٣ = ٦ ١٨ — ٦ = ١٢ ٣ — ١ = ٢

(خاصية ٢) مجتمع عدة تناسبات حسابية يساوي التناسب بين

مجموع الاجزاء الاولى ومجتمع الاجزاء التالية مثلاً مجتمع تناسبي (ك — ل) + (د — ب) = (ك + د) — (ب + ل) لان كلاً منهما = ك + د — ب — ل كذلك (د — ب) + (ه — ٩) + (ط — ى) = (د + ه + ط) — (ب + ٩ + ى)

خاصية٣ : فضلة بعض تناسبات حسابية من بعض يساوي التناسب بين فضلة الاجزاء الاولى بعضها من بعض وفضلة الاجزاء التالية بعضها من بعض على ترتيب واحد مثلاً في التناسبات ٨ ٠٠ د ، ك ٠٠ ب ، ه ٠٠ ل الخ يكون (٨+ك — ه) ٠٠ (د+ب — ل) = (٨ — د) +(ك — ب) — (ه — ل) لان كلاً من الطرفين =٨+ك — ه — د — ب+ل

تمرين

ما هو التناسب الحسابي بين

(١) ك — ٨ و د — ل (٢) ٣ ب — ه و ٢ ب + ه

(٣) ٣ ب + ل — ه و ٢ ب — ل

(٤) د [٥ — ٢ ب (ب — ه)] و ٥ د (ه — بٓ)

(٥) اي تناسب اعظم د ٠٠ ه ام ٢ (د + ه) ٠٠ ٣ ه

(٦) (ب — ك) ٠٠ ٢ ك ام (٤ ب + ك) ٠٠ (٣ ب + ٢ ك)

(٧) رجل كان ايراده من تجارته ٦ ه ومصروفه د + ه وايراده من ابنيته ٣ ب ومصروفه عليها ب + د وايراده من بساتينه ٢ ه + ب وما ينفقه عليها ه فما هو التناسب الحسابي بين الايراد والمصروف من كل منها وما هو مجموع هذه التناسبات

(٨) كم مرة يزيد تناسب ٦ ب ٠٠ ٢ ه عن ٣ ب ٠٠ ه

(٩) كم مرة ينقص تناسب ٢ د ٠٠ ه عن ٦ د ٠٠ ٣ ه

الفصل الثاني

في النسبة الحسابية

(٨٥) النسبة الحسابية هي المساواة بين تناسبين حسابيين واشارتها = بينهما فهي مؤلفة من اربعة اجزاء يسمى الاول والاخير منها طرفين والثاني والثالث وسطين مثلاً ٨ — ٢ = ١٠ — ٤ و د ٠٠ ك = م ٠٠ ن وقد يتساوى الطرفان او الوسطان فتكون بين ثلاث كميات يسمى ثالثها متناسباً ثالثاً للاخرين ويسمى المكرر متناسباً متوسطاً بين الاخرين

(٨٦) خاصيتها مجتمع الطرفين من نسبة حسابية يساوي مجتمع الوسطين مثلاً ليكن ك — ٨ = ٩ — ٦ فيكون ك + ٦ = ٩ + ٨ (اولية٣) واذا تساوى الوسطان فمجتمع الطرفين يساوي مضاعف الوسط المتناسب الحسابي مثلاً ك — ٨ = ٨ — د اذاً ك + د = ٨ + ٨ = ١٦

(٨٧) لنا من ذلك هذه القاعدة لاستعلام المتناسب المجهول

اذا كان المجهول طرفاً فهو فضلة الوسطين والطرف الاخر وان كان وسطاً فهو فضلة الطرفين والوسط الاخر مثلاً

اي كمية التناسب بينها و٥ كالتناسب بين ٩ و ٦ الحل ٥ + ٩ — ٦ = ٨ اي ٨ — ٥ = ٩ — ٦ . مثال اخر ما هي الكمية الثالثة من النسبة الحسابية ب ، د ، ل الجواب ب + ل — د فيكون ب — د = (ب + ل — د) — ل

الوسط المتناسب الحسابي يساوي نصف مجتمع الطرفين لانه حسبما تقدم في ب — ك = ك — د يكون ٢ك = ب + د اذا ك = $\frac{ب+د}{٢}$ (اولية٦)

فالوسط بين ٩ و ٥ هو $\frac{٩+٥}{٢}$ = ٧ فيكون ٩ — ٧ = ٧ — ٥

تمرين

كيف تثبت صحة النسب الاتية

(١) (د + ب) ‥ ٢ د = (٥ ب + ٣ د) ‥ (٤ ب + ٤ د)

(٢) (ﻫ — ٣ ل) ‥ (٢ ل — ٥ ﻫ) = ٧ (ﻫ — ل) ‥ (ﻫ — ٢ل)

(٣) ١٧ — د ‥ ٢ د + ٥ = ١٢ ‥ ٣ د

خذ المتناسب المجهول فيما يأتي

(٤) د ، ب ، ل (٥) ١٢ ، ١٠ ، ٤

(٦) ك ، ٦ ، ٨ ، (٧) ، د — ﻫ ، ٢ د ، ٢د — ٢ ﻫ

(٨) ما هو المتوسط الحسابي بين ٧ و٣ (٩) بين ك ، د

(١٠) بين (٢ د — ﻫ) و (د — ٢ ﻫ) (١١) ٥ ب — ﻫ ، ب+٣ﻫ

الفصل الثالث

في التناسب الهندسي

(٨٨) التناسب الهندسي هو تفاوت الكميتين في العد اي هو الخارج من قسمة احداها على الاخرى وبمثابة كسر جزؤه الاول صورة ويسمى سابقاً وجزؤه الثاني مخرج ويسمى تالياً واشارته : تتوسط بينهما مثلاً ٨ : ٢ اي $\frac{٨}{٢}$ و ك : د اي $\frac{ك}{د}$. وهو اما مستقيم والمراد به الخارج من قسمة السابق على التالي كما مر واما مكفؤ او بالقلب وهو التناسب المستقيم بين مكفوئيهما او بين التالي والسابق مثلاً تناسب ب : د بالقلب هو د : ب او $\frac{١}{ب}$: $\frac{١}{د}$

بين التناسب الهندسي وسابقه وتاليه ذات الخاصيات الموجودة بين كسر وصورته ومخرجه فنكتفي بايرادها ويرجع باثباتها الى ما مر

(٨٩) سابق تناسب يساوي حاصله في تاليه وتالي تناسب يساوي

خارج سابقه عليه مثلاً ليكن التناسب س : د = ب اذًا ب = $\frac{س}{د}$

و س = د ب و د = $\frac{س}{ب}$

(٩٠) في تناسبين اذا تساوى ركنان كلٌ وما يماثله في الاخر كان الركن الثالث متساويًا فيهما مثلاً ليكن ب : د و ك : ى فلو فرض ب = ك د = ى يكون التناسبان متساويين (اقليدس ك٥ ق٧) اي ب : د = ك : ى (اولية ٦) كذلك لو فرض تساوي السابقين اي ب = ك والتناسبين اي ب : د = ك : ى يكون (اولية ٦) ب ÷ $\frac{ب}{د}$ = ك ÷ $\frac{ك}{ى}$ اي د = ك فالتاليان متساويان ايضًا ولو فرض تساوي التناسبين ب : د = ك : ى والتاليين د = ى يكون السابقان متساويين اي ب = ك لان $\frac{ب}{د}$ × د = $\frac{ك}{ى}$ × ى (ك٥ ق٩)

(٩١) التناسب الهندسي يساوي واحدًا او اكثر من واحد او اقل منه تبعًا للسابق ان ساوى التالي او كان اكثر منه او اقل مثاله

ب : ب = ١ ب + د : د > ١ ب − د : ب < ١

ويقال للاول تناسب المساواة وللثاني تناسب اكبر وللثالث تناسب اصغر

(٩٢) يضرب التناسب بضرب السابق او قسمة التالي ويقسم بقسمة السابق او ضرب التالي مثلاً ليكن ك : ب = ر اي $\frac{ك}{ب}$ فيكون

ن ك : ب = ن ر ك : $\frac{ب}{ن}$ = ن ر

$\frac{ك}{ه}$: ب = $\frac{ر}{ه}$ ك : ب ه = $\frac{ر}{ه}$

فرع : اذا بقي التالي على حاله فالتناسب يكبر بزيادة السابق ويصغر بنقصانه واذا بقي السابق على حاله فالتناسب يكبر بنقصان التالي ويصغر بزيادته

(٩٣) لا يتغير التناسب الهندمي بضرب السابق والتالي في كمية واحدة او قسمتهما على كمية واحدة (٦٨) مثلاً

ك : ى = ب دك : دى = دب $\frac{\text{ك}}{\text{ه}} : \frac{\text{ي}}{\text{ه}} = \frac{\text{ب}}{\text{ه}}$

فرع اول : التناسب بين كسرين مثل التناسب بين صورتيهما بعد تحويلهما الى مخرج مشترك

مثلاً $\frac{\text{ب}}{\text{ن}} : \frac{\text{ه}}{\text{ن}}$ مثل ب : ه $\frac{\text{ف}}{\text{س}} : \frac{\text{د}}{\text{ي}}$ مثل ف ى : دس

وذلك كضرب حدي التناسب الاول في ن والتناسب الثاني في س ى

فرع ثانٍ: التناسب بين كسرين لهما صورة واحدة مثل التناسب المكفؤ بين مخرجيهما .

مثلاً $\frac{٢}{٣} : \frac{٢}{٥}$ مثل $\frac{١}{٣} : \frac{١}{٥}$ او ٥ : ٣ وذلك بقسمتهما على ٢

و $\frac{\text{ب}}{٨} : \frac{\text{ب}}{٧}$ مثل $\frac{١}{٨} : \frac{١}{٧}$ او ٧ : ٨ بقسمتهما على ب

(٩٤) لدى مقابلة تناسب باخر اما ان يتساويا واما ان يكون احدهما اعظم من الاخر فالمتساويان ما كان بين سابق الواحد منهما وتاليه ذات التناسب الذي بين سابق الاخر وتاليه مثلاً ٨ : ٤ = ٦ : ٣ لان $\frac{٨}{٤} = \frac{٦}{٣}$

و د : ك = ب : ه متى كان $\frac{\text{د}}{\text{ك}} = \frac{\text{ب}}{\text{ه}}$

والتناسب الاعظم هو ما كان بين سابقه وتاليه تناسب اكبر من الموجود بين سابق التناسب الاخر وتاليه مثلاً ٦ : ٣ و ٧ : ٤ فالتناسب الاول اعظم لان التناسبين مثل $\frac{٦}{٣} : \frac{٧}{٤}$ او $\frac{٢٤}{١٢} : \frac{٢١}{١٢}$ وبما ان السابق اكبر يكون ٦ : ٣ > اي الاول هو الاعظم

كذا $\text{د}^٢ + \text{ب}^٢ : \text{د}^٢ - \text{ب}^٢$ و د + ب : د − ب تناسبهما مثل

$\frac{\text{د}^٢ + \text{ب}^٢}{\text{د}^٢ - \text{ب}^٢} \therefore \frac{\text{د} + \text{ب}}{\text{د} - \text{ب}}$ او $\frac{\text{د}^٢ + ٢\text{دب} + \text{ب}^٢}{\text{د}^٢ - \text{ب}^٢}$ فترى ان التالي تزيد صورته

٢ د ب فالتناسب الثاني د + ب : د — ب هو الاعظم

(٩٥) يقل التناسب الاكبر ويزداد التناسب الاصغر باضافة كمية واحدة الى جزئيه مثلاً ليكن التناسب د — ب واجمع الى حديه ك فيصير د + ك : ب + ك ولننظر في ايهما هو الاعظم فنرى ان تناسبيهما مثل

$$\frac{د + ك}{ب + ك} \,..\, \frac{د}{ب} \text{ او } \frac{ب د + ب ك}{ب (ب + ك)} \,..\, \frac{ب د + د ك}{ب (ب + ك)}$$ وبطرح ب د

مثل $$\frac{ب ك}{ب (ب + ك)} \,..\, \frac{د ك}{ب (ب + ك)}$$ فاذا كان د : ب تناسباً اكبر يكون

ب < د والصورة ب ك اصغر من د ك فالتناسب الجديد قل عن المفروض واذا كان د : ب تناسباً اصغر يكون ب > د والصورة ب ك اعظم من د ك فالتناسب الجديد زاد على المفروض

وهكذا ٨ : ٥ يصغر فهو > ٨ + ك : ٥ + ك او ٩ : ٦

و ٦ : ٩ يكبر فهو < ٦ + ك : ٩ + ك او ٧ : ١٠

فرع يزداد التناسب الاكبر ويقل التناسب الاصغر اذا طرح من حديهما كمية (اصغر من كل منهما)

(٩٦) لا يتغير التناسب اذا اضيف الى جزئيه او طرح منهما كميتان بينهما التناسب ذاته مثلاً ليكن د : ب و ى : هـ متساويين اي $\frac{د}{ب} = \frac{ى}{هـ}$

فيكون د ± ى : ب ± هـ = د : ب (٨٠ نظ ٤)

(٩٧) التناسب اما بسيط وهو ما مر واما مركب من تناسبين فاكثر وهو التناسب بين حاصل سوابقها وحاصل تواليها مثلاً التناسب المركب من ١٥ : ٣ و ٨ : ٤ هو ١٥ × ٨ : ٣ × ٤ اي ١٢٠ : ١٢ والمركب من ب : د و س : ك و هـ : ى هو ب س هـ : د ك ى

التناسب المركب من عدة تناسبات يساوي حاصلها كما ترى في المثالين

فان ١٢٠ : ١٢ = ٥ × ٢ و ب س ه : د ك ى = ب/د × س/ك × ه/ى

ويحسن لدى استعلام التناسب المركب اخراج الضلع المشترك بين سابق وتالي فالمركب من ب : د و س : ب هو س : د عوض س ب : د ب

فرع : التناسب المركب من عدة تناسبات تالي الاول منها سابق الثاني وتالي الثاني سابق الثالث وهلم جرًّا يساوي تناسب السابق الاول الى التالي الاخير مثلاً المركب من ب : د و د : ه و ه : ف و ف : ى = ب : ى لانه = ب د ه ف : د ه ف ى

(٩٨) التناسب يزداد اذا تركب مع تناسب اعظم ويقل اذا تركب مع تناسب اصغر مثلاً

ليتركب د : ى مع (١ + ب) : ١ فيزيد ويصير د + د ب : ى

وليتركب د : ى مع (١ — ب) : ١ فيقل ويصير د — د ب : ى

(٩٩) قد يتركب تناسب من تكرار تناسب اخر بسيط فيسمى تناسباً مالياً او مكعباً الخ تبعاً لعدة مرار تكرار التناسب مثلاً ت : ب تناسبهما المالي ت^{2} : ب^{2} والكعبي ت^{3} : ب^{3} والميمي ت^{4} : ب^{4} وقد يتركب من جذور تناسب اخر فيسمى تناسب الجذر المالي نحو $\sqrt{}$ت : $\sqrt{}$ب او الكعبي نحو $\sqrt[3]{}$ت : $\sqrt[3]{}$ب او الميمي نحو $\sqrt[4]{}$ت : $\sqrt[4]{}$ب على اسم دليل الجذر

(١٠٠) نظرية اذا كانت فضلة سابق وتاليه اقل كثيراً من كل منهما يكون تناسبهما المالي التقريبي كتناسب التالي مع ضعف الفضلة الى التالي

اي تناسب د + ك : د المالي تقريباً هو (د + ٢ ك) : د

لان الاول د^{2} + ٢ د ك + ك^{2} : د^{2}

والثاني (د + ٢ ك) : د او د^{2} + ٢ د ك : د^{2}

فالفرق بينهما ك^{2} : د^{2} وهذا لا يعتد به متى كانت ك اصغر كثيراً من د

مثال اخر تناسب ١٠٠١ : ١٠٠٠ المالي التقريبي هو ١٠٠٢ : ١٠٠٠
وقيمة الاول ١٫٠٠٢٠٠١ والتناسب الثاني ١٫٠٠٢

وهكذا يبرهن ان التناسب المركب من تكرار تناسب بسيط يساوي على التقريب تناسب التالي وعدة المرار في الفضلة بين الجزئين الى التالي
اي تناسب (ك + د)^٢ : د^٢ تقريباً = د + ٢ ك : د
" (ك + د)^٣ : د^٣ " = د + ٣ ك : د
(ك + د)^م : د^م " = د + م ك : د

تمرين

اجد تناسبات الامثلة الاتية

(١) ٣ د : ١٥ د (٢) ٢ ك : ١٠ ك^٢ (٣) د ك : ب ك
(٤) د ب س : ب س (٥) د ك^٢ ى : ٢ ك (٦) ٣ د ب : ٢ د^٢
(٧) (١ — ك^٢) : (١ — ك) (٨) (د^٢ — ب^٢) : د + ب
(٩) ٥ د^٢ ك : ٤ د ك (١٠) ٢ ك^٢ ى : $\frac{١}{٢}$ ك^٢
(١١) $\frac{٧ د ك ى}{٢ \times ٣}$: $\frac{٥ د ى^٢}{٣ \times ٤}$
(١٢) ايّ اعظم ١٥ : ١٦ ام ١٦ : ١٧
(١٣) د + ٣ : $\frac{١}{٦}$ د ام ٢ د + ٧ : $\frac{١}{٣}$ د
(١٤) ايّ اعظم ٢ ك د : ٣ ب ى ام ٣ د : ٢ ب اذا كان ك = ٢ ى
(١٥) ما هو التناسب المركب من ٢ د : ب و ب ك : د
(١٦) ركب ٣ : ب و ٢ ت : ٥ ب و ٧ د + ١ : ٣ ى — ٢
(١٧) د + ب : هـ و د — ب : س + هـ و س + هـ : ح
(١٨) ايكبر د + ٢ : ب + ١ ام يصغر اذا تركب مع ٥ ك + ٧ : ٢ ك — ٣

(١٩) ماذا تسمي التناسب الحاصل من تركيب ك + ى : ه
و ك — ى : د و د : $\frac{ك^2 — ى^2}{د}$

(٢٠) ايٌ اكبر د + ٢ : ٥ د + ٤ ام ٥ د + ٣ : د + ٥

(٢١) ما هو التناسب المالي من ٧ : ٦ و د : ب و ٥ : ٣

(٢٢) ضع تناسباً يقرب من (د + ك)^٥ : د^٥

(٢٣) ركب تناسباً من د : ى و ب : ٢ ى بالقلب

(٣٤) اي تناسب يقرب من (١٠٠٤+١)^٢ : (١٠٠٤)^٢

الفصل الرابع

في النسبة الهندسية

(١٠١) النسبة الهندسية هي مساواة بين تناسبين هندسيين فهي مؤلفة من زوجين او اربع كميات يقال لهاهكذا على الترتيب زوج اول وزوج ثان كذا سابق اول فسابق ثانٍ فتالٍ اول فتالٍ ثانٍ ويقال للاول والرابع الطرفان وللثاني والثالث الوسطان وللسابقين معاً او للتاليين الجزءان المتشابهان ولسابقٍ وتاليه الجزءان المتناسبان . مثالها ب : د :: ى : س والاشارة :: تقرأ كنسبة وتفيد مساواة التناسبين

وقد تكون النسبة مركبة من ثلاث كميات يتكرر احدها فيقال له الوسط المتناسب بين الاخرين مثلاً ب : د :: د : ه

(١٠٢) النسبة اما مستقيمة وهي ما كان تناسباها مستقيمين كما رأيت واما مكفوءة او بالقلب وهي ما كان احد تناسبيها مكفوءً او بالقلب مثلاً
د : ب :: $\frac{١}{ه}$: $\frac{١}{ى}$ او د : ب :: ه : ى بالقلب و ب : د بالقلب :: ى : ه

(١٠٣) النسبة ايضاً اما بسيطة وهي المؤلفة من تناسبين بسيطين واما مركبة

وهي ما كان احد تناسبيها مركباً من تناسبين او اكثر مثلاً

د : ه :: { ب : ح
ق : ن
ل : م
ك : ى } اي :: ب ف ل ك : ح ن م ى

(١٠٤) خاصيتها : حاصل طرفي نسبة يساوي حاصل وسطيها (٧٩) مثلاً ليفرض د : ب :: ه : ى فيكون د ى = ب ه ولنا من ذلك (اولية ٦)

د = ب ه / ى و ى = ب ه / د كذا ب = د ى / ه و ه = د ى / ب

اي كل طرف من نسبة يعدل حاصل وسطيها مقسوماً على الطرف الاخر وكل وسط يعدل حاصل الطرفين مقسوماً على الوسط الاخر

فرع : في نسبة مركبة من ثلاث كميات حاصل الطرفين يساوي مربع الوسط مثلاً ليفرض ب : د :: د : ه فيكون ب ه = د٢

(١٠٥) اذا كان حاصل كميتين يساوي حاصل كميتين اخريين يمكن ان يجعل ضلعا احدهما طرفين وضلعا الاخر وسطين فتتركب من ذلك نسبة هندسية مثاله افرض ب د م = ه ل ف فيكون ب : ه ل :: ف : د م كذا ب : ه :: ل ف : د م او ب م : ه :: ل ف : د

فرع : اذا نقل ضلع من طرف او وسط الى مثله لا تتغير النسبة

(١٠٦) النسبة ككسرين متساويين يمكن تسطيرها على ثمانية اشكال (٨٠) فلا تنتزع بحالة مما يأتي

١ً بمبادلة الوسطين (اقليدس ك ٥ ق ١٦) ٢ً بالقلب (ك ٥ ق ب) ٣ً بهما معاً ٤ً بمبادلة الزوجين ٥ً الوسطين ثم الزوجين ٦ً بقلب ترتيب النسبة كلها ٧ً بمبادلة الطرفين فتصير النسبة

د:ب::ه:ى هكذا د:ه::ب:ى   ب:د::ى:ه   ه:د::ى:ب

ه:ى::د:ب   ب:ى::د:ه   ى:ه::ب:د   ى:ب::ه:د

(١٠٧) التناسبات المتساوية مع تناسب واحد هي متساوية (اولية ١) (اق ك ٥ ق ١١) لذلك يمكن ان يعوض عن جزءين متشابهين اومتناسبين بما يناسبهما مثلاً من

ب:د::ه:ى   و ب:د::س:ل   لنا   س:ل::ه:ى

ب:د::ه:ى   و ف:د::ل:ى   لنا   ب:ف::ه:ل

ضع في الاولى ف عوض د و ل عوض ى لانه من الثانية د : ى::ف: ل

من ه:س::ب:د   و س:ى::د:ل   لنا   ه:ى::ب:ل

هنا ى عوض س و ل عوض د لانه من الثانية س:د::ى:ل

من ه:م::ب:ن   و س:د::م:ن   لنا   ه:س::ب:د (ك ٥ ق ٢٢)

(١٠٨) لا تنتزع النسبة اذا ضرب جزءا احد الزوجين المتناسبين او المتشابهين اوكليهما معاً في كمية واحدة او قسما عليها لان التناسب بينهما لا يتغير مثلاً ليكن د:ب::ه:ى فيكون لنا حسبما سبق

د:ب ، دف:ب ف ، $\frac{د}{ف}$: $\frac{ب}{ف}$ ::ه:ى ، ه س:ى س ، $\frac{ه}{س}$: $\frac{ى}{س}$

دف:ب::ه ف:ى   د:ب س::ه:ى س   دف:ب س::ه ف:ى س

$\frac{د}{ف}$: ب:: $\frac{ه}{ف}$: ى   د : $\frac{ب}{ف}$ ::ه : $\frac{ى}{ف}$ $\frac{د}{ف}$: $\frac{ب}{س}$ :: $\frac{ه}{ف}$: $\frac{ى}{س}$

(١٠٩) النسبة نظير كسرين متساويين تتركب حسبما يأتي على اشكال مختلفة (٨١) لتكن د : ب:: ه : ى اي $\frac{د}{ب} = \frac{ه}{ى}$ فلنا (اقليد ٥ : ١٧ و١٨)

بجمع المتناسبين او طرحهما   د ± ب : ه ± ى :: د : ه و :: ب: ى

بجمع المتشابهين او طرحهما   د ± ه : ب ± ى :: د : ب و :: ه : ى

بجمع المتناسبين وطرحهما   د + ب : د — ب:: ه + ى : ه — ى

بجمع المتشابهين وطرحها   د + ه : د — ه :: ب + ى : ب — ى

(١٠٢) في عدة كميات متناسبة تكون نسبة سابق الى تاليه كنسبة مجتمع السوابق الى مجتمع التوالي او كفضلة بعض السوابق من بعض الى بعض التوالي من البعض الاخر على الترتيب   (٨٠ نظرية ٤)

ليكن ف : ب :: س : د و ف : ب :: ح : ه و س : د :: م : ن

فيكون ف : ب (اق ك ٥ ق ١٢) :: ف+س+ح+م : ب+د+ه+ن

ايضاً ف : ب الخ :: ف — س + ح — م : ب — د + ه — ن

(١٠٣) اذا كان للنسبتين ذات الطرفين او ذات الوسطين كان الوسطان او الطرفان الباقيان من احداها كنسبة الجزءين الباقيين من الاخرى بالقلب (اقليد ك ٥ ق ٢٣) مثاله من

د : ب :: ه : ى و س : ب :: ه : ف لنا د : س :: $\frac{١}{ى}$: $\frac{١}{ف}$

لان ب ه = د ى = س ف اي د : س :: ف : ى كذلك

من ف : د :: ى : ه و ف : ن :: ب : ه لنا د : ن :: $\frac{١}{ى}$: $\frac{١}{ب}$

(١٠٤) اذا ضربت اجزاء نسبة في اجزاء نسبة اخرى كل في نظيره او قسمت عليها تكون الحواصل او الخوارج متناسبة مثلاً ليكن

ه : ب :: س : د
و ف : ى :: ن : م
} فيكون ه ف : ب ى :: س ن : د م
$\frac{ه}{ف}$: $\frac{ب}{ى}$ :: $\frac{س}{ن}$: $\frac{د}{م}$

(١٠٥) قوات اجزاء نسبة او جذورها متناسبة ايضاً كحواصل نسب واحدة

ه : ب :: س : د   ٢ : ٣ :: ٤ : ٦

$ه^{٢}$: $ب^{٢}$ :: $س^{٢}$: $د^{٢}$ ٤ : ٩ :: ١٦ : ٣٦

$ه^{ن}$: $ب^{ن}$ :: $س^{ن}$: $د^{ن}$ $٢^{\frac{١}{ن}}$: $٣^{\frac{١}{ن}}$ :: $٤^{\frac{١}{ن}}$: $٦^{\frac{١}{ن}}$

$ه^{\frac{١}{ن}}$: $ب^{\frac{١}{ن}}$ :: $س^{\frac{١}{ن}}$: $د^{\frac{١}{ن}}$

تمرين

ضع في هيئة نسبة ما يأتي وعلى ثمانية اشكال (١٠٠)

(١) $\frac{١}{٢} = \frac{٢}{٤}$ (٢) $\frac{ك}{ى} = \frac{د}{ل}$ (٣) $\frac{٣ك}{٢ى} = \frac{٦ك^{٢}}{٤ك ى}$

(٤) $ك^{٢} - ى^{٢} = ٢د م$ (٥) $ك ى = ه م$ (٦) $ن^{٢} + ن د = د^{٢} - ه^{٢}$

اثبت صحة النسب الاتية

(٧) $ب^{٢} - د^{٢} : ٢ب^{٢} + ٢ب د :: ب - د : ٢ب$

(٨) $ب - د : ب + د :: ب^{٣} - ب^{٢}د + ب د^{٢} - د^{٣} : ب^{٣} + ب^{٢}د + ب د^{٢} + د^{٣}$

(٩) $٢ك ى : ك^{٢} :: ٤ى : ٢ك$

ركب النسب الاتية حسب (١٠١)

(١٠) $د : ٢ى :: ٣ه : م$ (١١) $٢س : س + ه :: ٣د : م - ٢د$

(١٢) $ك : ه :: ٢ه - ك : ٣ك + ه$ (١٣) $د + ب : د :: ه + ى : ه$

(١٤) $د : ف :: ى : ل$ و $ف : ل :: ب : ن$ فما هي نسبة $د : ب$

(١٥) اربعة رجال اشتغلوا ١٢ يوماً و٥ ساعات يومياً لبناء دار طولها ١٠٠ اذراع وعلوها ٣ اذرع واشتغل ى رجلاً ٢٠ يوماً وكل يوم ٦ ساعات لبناء دار طولها ١٨٠ ذراعاً وعلوها ١٠ اذرع وكان ما اشتغله كل منهم في الساعة قدر الاخر فما هي نسبة ٤ : ى

استعلم المجهول من النسب الاتية

(١٦) $٢ : ٣ :: ٤ :$ (١٧) $ك : ى :: ٢ى :$

(١٨) $: ب :: ١٠د : ٥ب$ (١٩) $: ٣ى :: ٢ى : ٣ى^{٢}$

(٢٠) $ب : ى :: \quad : ٥ى$ (٢١) $د : ه :: \quad : ٢ه^{٢}$

(٢٢) $ك : \quad :: ك^{٢} : ك ى$ (٢٤) $٥ب : \quad :: د : ٥ب$ بالقلب

ما هي النسبة المؤلفة من

$د : ه :: ف : ل$ و $٢ه : ب :: ٣ل : س$

الباب الخامس

الرفع

(١٠٦) الرفع او الترقية ضرب كية في نفسها مرة او اكثر ويسمى الحاصل من ذلك قوة ويشار الى عدد المضاريب بدليل القوة وهو يكتب بشكل صغير فوق الكمية عن يسارها   مثاله

$ب = ب^{١}$ القوة الاولى من با او با بدليل ١ (صفحة ٧)

$ب^{٢} = ب \times ب$ « الثانية « ٢

$ب^{٣} = ب \times ب \times ب$ « الثالثة « ٣

$ب^{ن} = ب \times ب$ مرارًا تساوي ن « النونية « . . . . . ن

يقال للقوة الثانية مربع او مال وللثالثة مكعب وللرابعة مال المال

الحصر بدليل القوة اشارة الى وجوب ترقية جميع الحدود المحصورة الى قوة من ذاك الدليل

$(ب ى)^{٢} = ب ى \times ب ى$

$(ب + ى)^{٣} = (ب + ى) \times (ب + ى) \times (ب + ى)$

$(٢ د - س + ب)^{٢} = (٢ د - س + ب) (٢ د - س + ب)$

الفصل الاول

في ترقية حد تام

(١٠٧) مربع $ك^{٣}$ هو $ك^{٣} \times ك^{٣} = ك^{٦}$ او $ك^{٣ \times ٢}$ ومكعب $ك^{٥} = ك^{٥} \times ك^{٥} \times ك^{٥} = ك^{١٥}$ او $ك^{٥ \times ٣}$ وبموجب ذلك

رق القوات بضرب دلائلها في دليل القوة المفروضة

القوة الخامسة من م = م^{٥} من هـ$^{-١}$ = هـ$^{-٥}$ من ن^{٤} = ن^{٢٠} من ب^{د} = ب^{٥د}

المسمى العددي يجب ترقينه الى القوة المفروضة ايضاً مثلاً

(٢ ف^{٢})^{٥} = ٣٢ ى^{١٠}

($\frac{١}{٢}$ د$^{-٢}$)^{٤} = $\frac{١}{١٦}$ د$^{-٨}$

تنبيه ١٠ — قوة حاصل عدة كميات تساوي حاصل قوات كل منها مثلاً

(ب^{٢} × د^{٣} × ٢ م^{٥})^{٣} = ب^{٦} × د^{٩} × ٨ م^{١٥} = ٨ ب^{٦} د^{٩} م^{١٥}

(س^{٢} × ٢ ب^{٥} × ٣ ف^{٤})^{٥} = س^{١٠} × ٣٢ ب^{٢٥} × ٢٤٣ ف^{٢٠}

= ٧٧٧٦ س^{١٠} ب^{٢٥} ف^{٢٠}

تنبيه ٢٠ — اشارة القوة تتغير كتغير اشارة حاصل المضاريب (٤١) فرق كمية ايجابية ايجابي دائماً لان كافة المضاريب ايجابية

(ك د^{٢})^{٣} = ك د^{٢} × ك د^{٢} × ك د^{٢} = ك^{٣} د^{٦}

(ب هـ^{٣})^{٤} = ب هـ^{٣} × ب هـ^{٣} × ب هـ^{٣} × ب هـ^{٣} = ب^{٤} هـ^{١٢}

ومرق كمية سلبية الى قوة شفعية ايجابي ايضاً لان عدد المضاريب السلبية شفعا

(— ك^{٣})^{٤} = ك^{١٢} لانها تحصل من — ك^{٣} × — ك^{٣} × — ك^{٣} × — ك^{٣}

ومرق كمية سلبية الى قوة وترية سلبي (فقط) لان عدد المضاريب السلبية وتراً

(—ك^{٣})^{٥} = —ك^{١٥} لانها حاصل —ك^{٣} × —ك^{٣} × —ك^{٣} × —ك^{٣} × —ك^{٣}

(— د)^{م} = ± د^{م} = { د^{م} ان كانت م شفعا
— د^{م} ان كانت م وتراً }

ولنا من ذلك

القوة الوترية لها علامة الكمية الاصلية والقوة الشفعية ايجابية دائماً

تمرين

رق ما يأتي

ب د الى القوة الخامسة $= (ب\,د)^{5} = ب^{5}\,د^{5}$

- $٢\,ف^{2}$ الى القوة السادسة
- $٤\,ث^{2}\,م^{4}$ . . السابعة
- $٣\,د^{ن}\,ى^{-2}\,ل^{2}$ . . الرابعة
- $٨\,ب^{2}\,ف^{-2}$ . . النونية
- $\frac{٢}{٣}\,ك\,ى^{-1} \times د^{2}\,م^{ن}$. العاشرة
- $٥\,م^{2} \times ٢\,د^{2} \times ب^{-2}$ الى القوة الثامنة
- $٩\,د^{2} \times ٣\,ب^{-2} \times ٥\,ن^{5}$ الى القوة الميمية م
- $—\,د\,م$ الى القوة الرابعة
- $—\,٢\,ف\,ط$ . . الثالثة
- $—\,ب^{2}\,م$ . . الخامسة
- $—\,٣\,د^{2}\,ل^{2}$ . . الرابعة
- $—\,م\,ط$ . . النونية ن
- $—\,٢\,م^{2}\,ب$. المائية هـ
- $—\,ب^{2} \times ٥\,م^{2} \times ٢\,ى^{-1}$. السادسة

الفصل الثاني

في رفع الكسر

(١٠٨) تضرب الكسور باخذ حاصلي الصور والمخارج اي $\frac{ك}{ل} \times \frac{ك}{ل} = \frac{ك^{2}}{ل^{2}}$ كذا $\frac{٢ب}{د} \times \frac{٢ب}{د} \times \frac{٢ب}{د} = \frac{٨ب^{3}}{د^{3}}$ فلنا من ذلك القاعدة الآتية لترقية الكسر

رق الصورة والمخرج كلا منهما على حدة الى القوة المفروضة مثلاً

$$\left[\frac{ب\,د^{2}\,س}{٢\,هـ\,م}\right]^{3} = \frac{(ب\,د^{2}\,س)^{3}}{(٢\,هـ\,م)^{3}} = \frac{ب^{3}\,د^{6}\,س^{3}}{٨\,هـ^{3}\,م^{3}}$$

$$\left[\frac{٢\,ب^{3}\,ك}{٣\,د\,م^{-2}}\right]^{4} = \frac{(٢\,ب^{3}\,ك)^{4}}{(٣\,د\,م^{-2})^{4}} = \frac{١٦\,ب^{12}\,ك^{4}}{٨١\,د^{4}\,م^{-8}}$$

$$\left[\frac{—\,٣\,د\,هـ^{3}}{٨\,ن^{2}}\right]^{2} = \frac{(—\,٣\,د\,هـ^{3})^{2}}{(٨\,ن^{2})^{2}} = \frac{٩\,د^{2}\,هـ^{6}}{٦٤\,ن^{4}}$$

$$\left(\frac{-\text{ف}^{٢}\text{ط}}{٢\,\text{د}\,\text{ن}^{٢}}\right)^{٣}=\frac{(-\text{ف}^{٢}\text{ط})^{٣}}{(٢\,\text{د}\,\text{ن}^{٢})^{٣}}=\frac{-\text{ف}^{٦}\text{ط}^{٣}}{٨\,\text{د}^{٣}\text{ن}^{٦}}$$

$$\left(\frac{\text{ب}^{٢}-\text{د}\,\text{ن}}{٣\,\text{م}}\right)^{٤}=\frac{(\text{ب}^{٢}-\text{د}\,\text{ن})^{٤}}{(٣\,\text{م})^{٤}}=\frac{(\text{ب}^{٢}-\text{د}\,\text{ن})^{٤}}{٨١\,\text{م}^{٤}}$$

$$\left[\frac{-\text{د}^{٢}\times(\text{ه}-\text{ن})^{٢}}{(\text{ب}^{٢}-\text{ف})^{٢}}\right]^{٣}=\frac{-\text{د}^{٦}\times(\text{ه}-\text{ن})^{٦}}{(\text{ب}^{٢}-\text{ف})^{٦}}$$

(١٠٩) ينقل المسمى العددي مكفوءًا من المخرج الى الصورة وبالعكس (٧٦)

مثلاً $\frac{\text{ب}\,\text{م}}{٣\,\text{د}}=\frac{\frac{١}{٣}\,\text{ب}\,\text{م}}{\text{د}}$ $\quad\frac{٢\,\text{د}\,\text{ه}}{\text{ل}}=\frac{\text{د}\,\text{ه}}{\frac{١}{٢}\,\text{ل}}$ $\quad\frac{\frac{١}{٣}\,\text{ب}\,\text{م}}{\frac{١}{٢}\,\text{ل}}=\frac{٢\,\text{ب}\,\text{م}}{٣\,\text{ل}}$

وكذلك القوات تنقل مكفوءة من الصورة الى المخرج وقد مر بك ان مكفوء قوة يساوي تلك القوة بذات الدليل بعد تبديل اشارته اي

$\text{د}^{\text{ن}}=\frac{١}{\text{د}^{-\text{ن}}}$ و $\text{د}^{-\text{ن}}=\frac{١}{\text{د}^{\text{ن}}}$ وبناء على ذلك تسهل ترقية الكسر بتحويله

الى هيئة صحيح او مكفوء صحيح اي كسر صورته واحد وذلك كما يأتي

$$\frac{\text{د}^{٢}\text{ب}}{\text{م}^{٢}\text{ه}^{-١}}=\text{د}^{٢}\text{ب}\times\frac{١}{\text{م}^{٢}\text{ه}^{-١}}=\text{د}^{٢}\text{ب}\times\text{م}^{-٢}\text{ه}=\text{د}^{٢}\text{ب}\,\text{م}^{-٢}\text{ه}$$

$$\frac{\text{ب}^{٢}\text{ص}}{\frac{١}{٣}\text{د}^{-٢}\text{م}^{-\text{ن}}}=٣\,\text{ب}^{٢}\text{ص}\times\frac{١}{\text{د}^{-٢}\text{م}^{-\text{ن}}}=٣\,\text{ب}^{٢}\text{ص}\times\text{د}^{٢}\text{م}^{\text{ن}}=٣\,\text{ب}^{٢}\text{ص}\,\text{د}^{٢}\text{م}^{\text{ن}}$$

$$\frac{٢\,\text{د}\,\text{ف}^{٢}}{\text{م}\,\text{ن}}=\frac{١}{\frac{١}{٢}\text{م}\,\text{ن}}\times\text{د}\,\text{ف}^{٢}=\frac{١}{\frac{١}{٢}\text{م}\,\text{ن}}\times\frac{١}{\text{د}^{-١}\text{ف}^{-٢}}=\frac{١}{\frac{١}{٢}\text{م}\,\text{ن}\,\text{د}^{-١}\text{ف}^{-٢}}$$

$$\frac{\text{٣ م}^{-٢}\text{ ه}^{-٢}}{\text{د ن}} = \frac{١}{\frac{١}{٢}\text{ د ن}} \times \text{م}^{-٢}\text{ ه}^{-٢} = \frac{١}{\frac{١}{٢}\text{ د ن}} \times \frac{١}{\text{م}^{٢}\text{ ه}^{٢}} = \frac{١}{\frac{١}{٢}\text{ د ن م}^{٢}\text{ ه}^{٢}}$$

وعلى هذه الصورة تنقل ايضاً بعض القوات سيما السلبية الدلائل من الصورة الى المخرج و بالعكس

$$\frac{\text{ب د}^{-٢}}{\text{ه}^{-٢}\text{ ن}^{٢}} = \frac{\text{ب ه}^{٢}}{\text{د}^{٢}\text{ ن}^{٢}} \qquad \frac{\text{د}^{٢}\text{ م}^{-٢}\text{ ه}^{-٢}}{\text{ه}^{-ن}\text{ ف}^{٢}} = \frac{\text{د}^{٢}\text{ ه}^{ن}}{\text{ف}^{٢}\text{ م}^{٢}\text{ ه}^{٢}}$$

$$\frac{\frac{١}{٤}\text{ م}^{٢}\text{ ل}^{-٥}}{\frac{١}{٢}\text{ د}^{-٢}\text{ ف}} = \frac{\text{٣ م}^{٢}\text{ د}^{٢}}{\text{٤ ف ل}^{٥}}$$

$$\frac{\frac{١}{٥}\text{ س}^{٢-ن}}{\frac{١}{٤}\text{ د}^{٢-٥}} = \frac{\frac{١}{٥}\text{ س}^{٢}\times\text{س}^{-ن}}{\frac{١}{٤}\text{ د}^{٢}\times\text{د}^{-٥}} = \frac{\text{٤ س}^{٢}\text{ د}^{٥}}{\text{٥ د}^{٢}\text{ س}^{ن}}$$

تمرين

(١) رقِ $\frac{\text{٥ م د}^{٢}}{\text{٤ ب س}^{-١}}$ الى القوة الخامسة

(٢) $\frac{\text{٢ ف}^{-٢}\text{ ه}^{٢}}{\text{٥ ب}^{٢}\text{ ف}^{-١}}$ الى القوة الرابعة

(٣) $\frac{-\text{ ٢ د م}^{٢}}{\text{٣ ف}^{٤}\text{ ل}^{-١}}$ الى القوة السادسة

(٤) $\frac{-\text{ ٣ م}^{-١}\text{ ن}^{٢}}{\text{ب}^{٢}\text{ ف}^{-٢}\text{ د}^{٥}}$ الى القوة الثالثة

(٥) $\frac{-\text{ ب د}^{٢}}{\text{٣ ف}}$ الى القوة الثونية

(٦) انقل الى هيئة صحيح $\frac{٢ب د}{ف^{-١} هـ^{-٢}}$ ، $\frac{-٤ ف^{٢}}{ب^{٢} د^{٢} هـ}$ ، $\frac{٥ س^{٢}}{ب^{-١} د^{-هـ} م^{٢} ف^{ن}}$

(٩) انقل الى هيئة مكفوء $\frac{\frac{١}{٢} س^{ن} د^{٢} ب^{ن}}{ل هـ^{٢}}$ ، $\frac{٢ ف^{-١} م^{-٢} ل^{-هـ}}{س ل د}$ ، $\frac{ب^{-هـ} د^{-٢} ل^{٢} ن^{٢}}{٣ ف م^{٢} س^{ن}}$

انقل القوات السلبية الدلائل من الصورة والمخرج في الكسور الاتية

(١٢) $\frac{ت^{-١} د^{٢} ب^{-هـ}}{ف^{-١} هـ^{-٢} م^{-ن}}$ ، $\frac{٣ ب^{-ن} هـ^{٢} م}{٥ ب^{٢} هـ^{-ن} د}$ ، $\frac{٢ د م^{-٢} ب^{-هـ}}{٤ ف ب^{-ن} ل^{-٢}}$

(١٥) $\frac{٣ د^{-٢} ف^{٢} ب^{-١}}{\frac{١}{٥} م^{-٢} ف^{-ن} ب^{-ر}}$ ، $\frac{٢ م^{-و} د^{-ب}}{٣ م^{-ن} ب^{-٢}}$ ، $\frac{\frac{١}{٢} ب^{٢} د^{-٢} م^{-ن}}{\frac{١}{٥} ف^{-٢} ل^{-هـ}}$

الفصل الثالث

في ترقية حدين او اكثر

(١١٠) اذا كانت العبارة مركبة من حدين او اكثر فقد يجري العمل في ترقيتها مجراه في الحد الواحد فتحصر بالدليل المطلوب اما اذا كانت محصورة بدليلها اولاً فترقى بضرب دليها في الدليل المفروض

مثلاً مربع (ب — د) = $(ب - د)^{٢}$

مكعب (ل + هـ) = $(ل + هـ)^{٣}$

مربع (ب — ص + ط) = $(ب - ص + ط)^{٢}$

القوة النونية من (د — ص) = $(د - ص)^{ن}$

القوة الميمية من (ف — هـ + ل) = $(ف - هـ + ل)^{م}$

مكعب $(ف - م)^{٢}(د - هـ)^{٢}(ك - ل)^{٤} = [(ف - م)^{٢}(د - هـ)^{٢}(ك - ل)^{٤}]^{٣}$

$= (ف - م)^{٦}(د - هـ)^{٦}(ك - ل)^{١٢}$

$$\text{مربع } \frac{(ب-د)^{٢}(٢س+م)^{ن}}{(د+ب)} = \left[\frac{(ب-د)^{٢}(٢س+م)^{ن}}{(د+ب)}\right]^{٢}$$

$$= \frac{(ب-د)^{٤}(٢س+م)^{٢ن}}{(د+ب)^{٢}}$$

اما اذا طلب الترقية فعلاً اي بسط هذه الحدود فيجري العمل هكذا

اضرب الكمية في نفسها مراراً حتى يماثل عدد المضاريب الدليل المطلوب

مثلاً مربع $٢ د ك = (٢ د ك)(٢ د ك) = ٤ د^{٢}ك^{٢}$

مكعب $(ب-١) = (ب-١)^{٣} = (ب-١) \times (ب-١) \times (ب-١)$

$$= ب^{٣} - ٣ ب^{٢} + ٣ب - ١$$

الرابعة من $(د^{٢}-ك) = (د^{٢}-ك)(د^{٢}-ك)(د^{٢}-ك)(د^{٢}-ك)$

$$= د^{٨} - ٤ د^{٦}ك + ٦ د^{٤}ك^{٢} - ٤ د^{٢}ك^{٣} + ك^{٤}$$

مربع $(د+ب-٥) = (د+ب-٥)(د+ب-٥)$

$$= د^{٢} + ٢ د ب - ١٠ د + ب^{٢} - ١٠ ب + ٢٥$$

مكعب $(م-د+ه) = (م-د+ه)(م-د+ه)(م-د+ه)$

$$= \begin{cases} م^{٣} - ٣ م^{٢}د + ٣ م^{٢}ه + ٣ م د^{٢} - ٦ م د ه \\ + ٣ م ه^{٢} + ه^{٣} - ٣ د ه^{٢} + ٣ د^{٢}ه - د^{٣} \end{cases}$$

ما هي القوة الرابعة من $(ب^{٢} - د ه + م^{٢})$

" " العاشرة من $(ب^{٢} - ٣ ب س^{٢})$

(١١١) تخلصاً من الضرب الممل وضع «الفيلسوف اسحق نيوتن» قاعدة مختصرة لترقية الكميات الثنائية نقشت على قبره في كنيسة وستمنستر في لندن تقديراً لاهميتها وفائدتها وهي مبنية على الملاحظات الاتية

ارفع ما يأتي ولاحظ القوات والمسميات والدلائل في الحاصل :

$$(ك + د)^{٢} = ك^{٢} + ٢\ ك\ د + د^{٢}$$

$$(ك + د)^{٣} = ك^{٣} + ٣\ ك^{٢} د + ٣\ ك\ د^{٢} + د^{٣}$$

$$(ك + د)^{٤} = ك^{٤} + ٤\ ك^{٣} د + ٦\ ك^{٢} د^{٢} + ٤\ ك\ د^{٣} + د^{٤}$$

$$(ك + د)^{٥} = ك^{٥} + ٥\ ك^{٤} د + ١٠\ ك^{٣} د^{٢} + ١٠\ ك^{٢} د^{٣} + ٥\ ك\ د^{٤} + د^{٥}$$

ملاحظة ١ : حاصل الترقية في الجميع سلسلة قوات منتظمة متجانسة الحدود من درجة الدليل فدليل الاصلية (الكمية الاولى ك) في الحد الاول يساوي دليل القوة المطلوبة ثم ينقص في كل حد واحدًا الى ان يفنى اما دليل التابعة (الكمية الثانية د) فيتزايد بقدر تناقص دليل الاصلية الى ان يساوي القوة المفروضة

قياسًا على ذلك لو طلب رفع ما يأتي لكان الحاصل بقطع النظر عن المسميات

$$(ك+د)^{ن} = ك^{ن} + ك^{ن-١} د + ك^{ن-٢} د^{٢} + ك^{ن-٣} د^{٣}\ \text{الخ}$$

$$(ك+د)^{٧} = ك^{٧} + ك^{٦} د + ك^{٥} د^{٢} + ك^{٤} د^{٣} + ك^{٣} د^{٤} + ك^{٢} د^{٥} + ك\ د^{٦} + د^{٧}$$

ملاحظة ٢ : مسمى الحد الاول واحد في الجميع . ومسمى الحد الثاني يساوي دليل القوة المطلوبة . ثم مسمى كل حد يساوي حاصل مسمى الحد السابق في دليل الاصلية منه مقسومًا على دليل التابعة مع واحد . مثلاً مسمى الحد الاول من القوة الخامسة واحد ومسمى الثاني ٥ ومسمى الثالث يساوي $\frac{٥ \times ٤}{١ + ١} = ١٠$ ومسمى الرابع $= \frac{١٠ \times ٣}{٢ + ١} = ١٠$ ومسمى الخامس $\frac{١٠ \times ٢}{٣ + ١} = ٥$ ومسمى السادس $\frac{٥ \times ١}{٤ + ١} = ١$

$$\text{اي}\ (ك+د)^{٥} = ك^{٥} + ٥\ ك^{٤} د + \frac{٥ \times ٤}{١ + ١} ك^{٣} د^{٢} + \frac{١٠ \times ٣}{٢ + ١} ك^{٢} د^{٣} + \frac{١٠ \times ٢}{٣ + ١} ك\ د^{٤} + \frac{٥ \times ١}{٤ + ١} د^{٥}$$

تنبيه . — متى عرفت **مسميات** نصف الحدود تعرف مسميات النصف

الاخر لان المسميات تهبط كما زادت فمسمى الحد الاول يساوي مسمى الاخير ومسمى الثاني يساوي مسمى ما قبل الاخير وهكذا الخ

(١١٢) لنا مما سبق القاعدة المنوه عنها: لترقية حدين بسيطين

نظم سلسلة قوات متجانسة الحدّ الاول منها يساوي الكمية الاولى مرقاة الى دليل القوة المطلوبة ثم ينقص في كل حد واحداً على التوالي فيتزايد دليل التابعة بقدره الى ان يساوي دليل القوة المطلوبة

اجعل مسمى الحد الاول واحداً ومسمى الثاني دليل القوة المطلوبة ثم اضرب مسمى كل حد في دليل الاصلية منه واقسمه على دليل التابعة مع واحد فيخرج مسمى الحد التالي له وهلمَّ جرًّا

ولنا من ذلك هذا الدستور العام:

$$(\text{ب} + \text{د})^{\text{ن}} = \text{ب}^{\text{ن}} + \text{ن}\,\text{ب}^{\text{ن}-1}\,\text{د} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{2}\,\text{ب}^{\text{ن}-2}\,\text{د}^{2}$$

$$+ \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)}{2\times 3}\,\text{ب}^{\text{ن}-3}\,\text{د}^{3} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)(\text{ن}-3)}{2\times 3\times 4}\,\text{ب}^{\text{ن}-4}\,\text{د}^{4}\ \text{الخ}$$

وعلى هذا النمط

$$(\text{ب}+\text{د})^{6} = \text{ب}^{6} + 6\,\text{ب}^{5}\text{د} + 15\,\text{ب}^{4}\text{د}^{2} + 20\,\text{ب}^{3}\text{د}^{3} + 15\,\text{ب}^{2}\text{د}^{4} + 6\,\text{ب}\,\text{د}^{5} + \text{د}^{6}$$

تنبيه . — اذا كانت الكمية التابعة سلبية فمن الواجب تغيير اشارة كل حد تدخل فيه ودليلها وتر

$$(\text{ب} - \text{د})^{2} = \text{ب}^{2} - 2\,\text{ب}\,\text{د} + \text{د}^{2}$$

$$(\text{ب} - \text{د})^{3} = \text{ب}^{3} - 3\,\text{ب}^{2}\text{د} + 3\,\text{ب}\,\text{د}^{2} - \text{د}^{3}$$

$$(\text{ب} - \text{د})^{٤} = \text{ب}^{٤} - ٤\,\text{ب}^{٣}\text{د} + ٦\,\text{ب}^{٢}\text{د}^{٢} - ٤\,\text{ب}\,\text{د}^{٣} + \text{د}^{٤}$$

$$(\text{ب} - \text{د})^{\text{ن}} = \text{ب}^{\text{ن}} - \text{ن}\,\text{ب}^{\text{ن}-١}\text{د} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-١)}{٢}\,\text{ب}^{\text{ن}-٢}\text{د}^{٢}\ \text{الخ}$$

تنبيه ٢ . — لو رقيت عبارة الى دليل سلبي مثلاً

$$(\text{د}+\text{ه})^{-٢} = \text{د}^{-٢} + (-٢)\text{د}^{-٣}\text{ه} + \frac{-٢ \times -٣}{٢}\,\text{د}^{-٤}\text{ه}^{٢} + \frac{-٢ \times -٣ \times -٤}{٢ \times ٣}\,\text{د}^{-٥}\text{ه}^{٣}\ \text{الخ}$$

$$= \text{د}^{-٢} - ٢\,\text{د}^{-٣}\text{ه} + ٣\,\text{د}^{-٤}\text{ه}^{٢} - ٤\,\text{د}^{-٥}\text{ه}^{٣}\ \text{الخ}$$

لوجدنا ان اشارة الحدود الشفعية تتبدل ثانياً ان حاصل الترقية نظير كسر عشري لا تنتهي حدوده لان دليل الاصلية لا يمكن ان يفنى بل يتناقص واحداً واحداً الى ما لا نهاية .

ملاحظة : $(١ + \text{م})^{٥} = ١ + ٥\text{م} + ١٠\text{م}^{٢} + ١٠\text{م}^{٣} + ٥\text{م}^{٤} + \text{م}^{٥}$

$$(\text{م} - ١)^{٦} = \text{م}^{٦} - ٦\text{م}^{٥} + ١٥\text{م}^{٤} - ٢٠\text{م}^{٣} + ١٥\text{م}^{٢} - ٦\text{م} + ١$$

يلاحظ من ذلك ان الواحد يسقط من الحدود الوسطى لان ضربه في كمية لا يغير فيها مهما كانت قوته ويمكن لاستعلام المسميات معرفة دليله في حد ما من فضلة دليل الكمية الاخرى والدليل المطلوب

(١١٣) جميع حدود الكميات الثنائية السابقة الذكر من القوة الاولى ومسماها واحد اما ترقية حدين من قوات ومسميات مختلفة فتجري بالتعويض هكذا

رق حدين بسيطين الى القوة المطلوبة ثم عوض عن كل حد بالحد المفروض

مثلاً لو طلب ترقية $\text{ب}^{٢} - \text{د}$ الى القوة الرابعة : رق اولاً

$$(\text{ه} - \text{د})^{٤} = \text{ه}^{٤} - ٤\,\text{ه}^{٣}\text{د} + ٦\,\text{ه}^{٢}\text{د}^{٢} - ٤\,\text{ه}\,\text{د}^{٣} + \text{د}^{٤}$$

ثم بالتعويض عن ه بالاصلية المفروضة ب^{٢}

(ب^{٢} — د)^{٤} = ب^{٨} — ٤ ب^{٦} د + ٦ ب^{٤} د^{٢} — ٤ ب^{٢} د^{٣} + د^{٤}

مثال اخر: رق ك^{٢} — د ب^{٢} الى القوة الكعبية . اولاً

(ه — م)^{٣} = ه^{٣} — ٣ ه^{٢} م + ٣ ه م^{٢} — م^{٣}

ثم بالتعويض عن ه بالاصلية ك^{٢} وعن م بالتابعة د ب^{٢}

(ك^{٢} — د ب^{٢})^{٣} = ك^{٦} — ٣ ك^{٤} د ب^{٢} + ٣ ك^{٢} د^{٢} ب^{٤} — د^{٣} ب^{٦}

اخر: رق (٢ م — ب/٤ د) الى القوة الرابعة . اولاً

(ك — ل)^{٤} = ك^{٤} — ٤ ك^{٣} ل + ٦ ك^{٢} ل^{٢} — ٤ ك ل^{٣} + ل^{٤} ثم بالتعويض

(٢م — ب/٤ د)^{٤} = ١٦ م^{٤} — ٨م^{٣} ب/د + ٣م^{٢} ب^{٢}/٢ د^{٢} — م ب^{٣}/٨ د^{٣} + ب^{٤}/٢٥٦ د^{٤}

ولك ان تعتبر الحد المضلع كمية محصورة دليلها واحد مثلاً

(٢ك — د^{٢})^{٣} = (٢ ك)^{٣} — ٣ (٢ك)^{٢} × (د^{٢}) + ٣ (٢ك) (د^{٢})^{٢} — (د^{٢})^{٣}

= ٨ ك^{٣} — ١٢ ك^{٢} د^{٢} + ٦ ك د^{٤} — د^{٦}

تمرين

رق وابسط

(ب + د) الى القوة ٢ ، — ٣ ، ٥ ، — ٨ ، ١٠ ، — ١٢

(ب — د) . . ٤ ، — ٦ ، ٧ ، — ٩ ، ١١ ، — ١٣

(ب + د) . . ن ، — ن . (ن + ١) (ن — ١)

(ب — د) . . ن — ن (ن + ١) (ن — ١)

(١/س — ن) = (س — ن)$^{-٢}$

(١/د — ب)^{٢} =

رق الى القوة الخامسة	القوة — ٤	القوة ن	ن — ٢
$د^{٢} — ٢م$	$ف + ن^{٢}$	$د + ٢م$	$ع^{٢} + م$
$٤ف — ٣س^{٢}ب$	$٣ف^{٢} — ٢س$	$٣ب^{٢} — ك$	$٣ع^{٢} — ٢م$
$٢د^{٢} — ب^{٢}م$	$٢د^{٢} + ٣مط^{٢}$	$٢د^{٢} + ٢ك^{٢}$	$ب^{٢} + ٤س^{٢}$
$\frac{هـ}{٢} — \frac{٣د^{٢}}{٤م}$	$\frac{د}{٢} — \frac{٥ف^{٢}}{٤د}$	$\frac{د}{٣} — \frac{٥ب^{٢}}{٢ك}$	$\frac{ب}{٣} — ٢ك^{-٢}$

الفصل الرابع

ترقية و بسط حدود متعددة

(١١٤) رقِ اولاً كمية ثنائية ثم عوض عن كل حد بحدين او اكثر من الحدود المطلوبة ثم ابسط الحدود المرقاة ايضاً بعد ذلك

مثلاً رقِ $ب^{٢} — ٢د + س$ الى القوة الكعبية

نرقي اولاً $(م + س)^{٣} = م^{٣} + ٣م^{٢}س + ٣مس^{٢} + س^{٣}$

بالتعويض $(ب^{٢} — ٢د + س)^{٣} = (ب^{٢} — ٢د)^{٣} + ٣(ب^{٢} — ٢د)^{٢}س$
$+ ٣(ب^{٢} — ٢د)س^{٢} + س^{٣}$

بسط الحدود $= ب^{٦} — ٦ب^{٤}د + ١٢ب^{٢}د^{٢} — ٨د^{٣} + ٣ب^{٤}س — ١٢ب^{٢}دس$
$+ ١٢د^{٢}س + ٣ب^{٢}س^{٢} — ٦دس^{٢} + س^{٣}$

ولك ان تعتبر كما سبق الحدين حداً واحداً بحصرها ثم بسط الحدود المحصورة بعد الترقية مثال ذلك

$(ب + د + ف)^{٢} = (ب + \overline{د + ف})^{٢}$

$= ب^{٢} + ٢ب(د + ف) + (د + ف)^{٢}$

$= ب^{٢} + ٢بد + ٢بف + د^{٢} + ٢دف + ف^{٢}$

او $= ب^{٢} + د^{٢} + ف^{٢} + ٢(بد + بف + دف)$

$$(د+ب+س)^٣=[د+(ب+س)]^٣$$
$$=د^٣+٣د^٢(ب+س)+٣د(ب+س)^٢+(ب+س)^٣$$
$$=د^٣+٣د^٢ب+٣د^٢س+٣د(ب^٢+٢ب س+س^٢)$$
$$+ب^٣+٣ب^٢س+٣ب س^٢+س^٣$$
$$=د^٣+ب^٣+س^٣$$
$$+٣(د^٢ب+د^٢س+ب^٢د+ب^٢س+س^٢د+س^٢ب)$$
$$+٦د ب س$$

(١١٥) لنا من المثالين المذكورين قاعدتان لتربيع عبارة مركبة وتكعيبها

١ً مربع عبارة مركبة يساوي مجموع مربعات كل حد منها مع مضاعف كل حد في مجموع الحدود التي تليه

$$(ب+ف+د+ه)^٢=ب^٢+ف^٢+د^٢+ه^٢$$
$$+٢ب(ف+د+ه)$$
$$+٢ف(د+ه)$$
$$+٢د\times ه$$
$$=ب^٢+ف^٢+د^٢+ه^٢+٢(ب ف+ب د+ب ه+ف د+ف ه+د ه)$$

$$(ب-ف-د+ه)^٢=ب^٢+ف^٢+د^٢+ه^٢$$
$$+٢ب(-ف-د+ه)$$
$$-٢ف(-د+ه)$$
$$-٢د\times ه$$
$$=ب^٢+ف^٢+د^٢+ه^٢+٢(-ب ف-ب د+ب ه+ف د-ف ه-د ه)$$

$$(٢ب-٣د^٢+س-٥ف)^٢=٤ب^٢+٩د^٤+س^٢+٢٥ف^٢-١٢ب د^٢$$
$$+٤ب س-٢٠ب ف-٦د^٢س+٣٠د^٢ف$$
$$-١٠س ف$$

٢ً مكعب عبارة مركبة يساوي مجموع مكعبات كل الحدود مع ثلثة امثال حاصل مربع كل حد في مجتمع الحدود الباقية مع ستة امثال مجموع الحواصل من ضرب كل ثلث حدود مختلفة

$$(ب+س+د+ف)^{٣} = ب^{٣}+س^{٣}+د^{٣}+ف^{٣}$$
$$+ ٣ب^{٢}(س+د+ف)$$
$$+ ٣س^{٢}(ب+د+ف)$$
$$+ ٣د^{٢} \times (ف+ب+س)$$
$$+ ٣ف^{٢}(ب+س+د)$$
$$+ ٦(ب س د + ب س ف + ب د ف + س د ف)$$

$$(ب-س+د-ف)^{٣} = ب^{٣}-س^{٣}+د^{٣}-ف^{٣}$$
$$+ ٣ب^{٢}(-س+د-ف)$$
$$+ ٣س^{٢}(ب+د-ف)$$
$$+ ٣د^{٢}(ب-س-ف)$$
$$+ ٣ف^{٢}(ب-س+د)$$
$$+ ٦(-ب س د + ب س ف - ب د ف + س د ف)$$

$$(٢د^{٢}-٣ف م+ن^{٢}-ع)^{٣} = ٨د^{٦}-٢٧ف^{٣}م^{٣}+ن^{٦}-ع^{٣}$$
$$+ ١٢د^{٤}(-٣ف م+ن^{٢}-ع)$$
$$+ ٢٧ف^{٢}م^{٢}(٢د^{٢}+ن^{٢}-ع)$$
$$+ ٣ن^{٤}(٢د^{٢}-٣ف م-ع)$$
$$+ ٣ع^{٢}(٢د^{٢}-٣ف م+ن^{٢})$$
$$+ ٦(-٦د^{٢}ف م ن^{٢}+٦د^{٢}ف م ع-٢د^{٢}ن^{٢}ع+٣ف م ن^{٢}ع)$$

تمرين

ربع (م+ن+ك+ل)　　(م+ن—ك+ل)

(م+ن—ك—ل)　　(م—ن+ك—ل)

(٢م—٣ك+٦د^{٢}—هن)　　(٣ف—٤ل+٢ه^{٢}—٣د^{٢})

(٥ف^{٢}—٤د^{٢}+٢م^{٢})　　(٢ب^{٢}—٣د^{٢}ب+٣دب^{٢})

كعب(ب+س—د—ف)　　(م—ب—س+ل)

(ف—د—م—ن)　　(٣د—٥س+ل^{٢}—ف^{٢})

(٢ب^{٢}—٣دس+ف^{٢})　　(٥م^{٢}ن+٣م^{٢}ن^{٢}—٤من^{٢})

(د^{٢}+٢دب^{٢}+د^{٢}ب—ب^{٢})　　(ن^{٣}—٤ن^{٢}+ن—١)

الباب السادس

التجذير

(١١٦) التجذير استعلام جذر كمية او قوة ما · وهو كمية اخرى اذا تعددت في نفسها مرة او اكثر حصلت الاولى او هو الكمية الاصلية التي نتجت من تعدادها القوة مثلاً جذر ٦٤ هو ٢ او ٤ او ٨ لان ٢^{٦}=٤^{٣}=٨^{٢}=٦٤ وجذر ب^{٤} هو ب او ب^{٢} لان (ب)^{٤}=ب^{٤}=(ب^{٢})^{٢}

يتعين الجذر بتعيين دليله مثلاً : $\sqrt[٢]{٦٤}$ = ٨　$\sqrt[٣]{٦٤}$ = ٤

$\sqrt[٢]{ب^{٤}}$ = ب^{٢}　$\sqrt[٤]{ب^{٤}}$ = ب

دليل الجذر يكتب بشكل صغير اما عن يمين اشارة الجذر واما بهيئة مخرج لدليل القوة مثلاً $\sqrt[3]{ب}$ او $ب^{\frac{1}{3}}$. $\sqrt[3]{دل}$ او $(دل)^{\frac{1}{3}}$. $\sqrt[4]{د^{3}}$ او $د^{\frac{3}{4}}$. $\sqrt[ن]{ب+ك}$ او $(ب+ك)^{\frac{1}{ن}}$. $\sqrt[3]{(د+ك)^{2}}$ او $(د+ك)^{\frac{2}{3}}$
وبمقتضى ذلك تكون صورة الدليل الكسري دليل قوة ومخرجه دليل جذر

الفصل الاول

تجذير كمية بسيطة

(١١٧) علمت ان القوات تحصل بالضرب فبعكس ذلك تنتج الجذور بالقسمة مثلاً : القوة النونية من $ب^{م}$ هي $ب^{م \times ن} = ب^{من}$ بالعكس الجذر النوني من $ب^{من}$ هو $ب^{\frac{من}{ن}} = ب^{م}$ فلنا من ذلك هذه القاعدة :

اقسم دليل القوة على دليل الجذر فالخارج دليل الكمية المطلوب

جذر $ب^{6}$ الكعبي $\sqrt[3]{ب^{6}} = ب^{\frac{6}{3}} = ب^{2}$
« $د^{-12}$ الرابع $\sqrt[4]{د^{-12}} = د^{\frac{-12}{4}} = د^{-3}$
« $ف^{ه}$ الميمي $\sqrt[م]{ف^{ه}} = ف^{\frac{ه}{م}}$
« $ب^{\frac{1}{4}}$ الكعبي $\sqrt[3]{ب^{\frac{1}{4}}} = ب^{\frac{1}{4} \div 3} = ب^{\frac{1}{12}}$

اما اشارة الجذر فتختلف حسبما رأيت من تبدل اشارة القوة تبعاً لاشارة الكمية الاصلية اي الجذر فلنا القواعد الاتية

١ً الجذر الوتري له علامة القوة ذاتها

كما ان القوة الوترية لها علامة الجذر ذاتها $\sqrt[3]{8} = 2$ لان $2^{3} = 8$
$\sqrt[3]{-8} = -2$ لان $-2^{3} = -8$ $\sqrt[3]{ب^{3}} = ب$ $\sqrt[5]{د^{-5}} = د^{-1}$

٢ً الجذر الشفعي لكمية ايجابية ملتبس

لان القوة الشفعية ايجابية دائماً مهما كان الجذر مثلاً $\sqrt{د^{٤}} = \pm د^{٢}$
لان $(د^{٢})^{٢}$ او $(-د^{٢})^{٢} = د^{٤}$

٣ً الجذر الشفعي لكمية سلبية مستحيل او وهمي

لانه لا يمكن ان ترفع كمية الى قوة شفعية فتصير سلبية لذلك تسمى جذور الكميات السلبية محدثة او وهمية اذ لا اصل حقيقي لها مثلاً

$$\sqrt{-٤} ، \sqrt{-ب^{٢}} ، \sqrt{-(ب+س)}$$

تنبيه : تجري الاعمال الجبرية على هذه الجذور الوهمية كعلى باقي الكميات الجذرية وتعتبر نظير كميات حقيقية مضروبة في $\sqrt{-١}$ ولها اهمية عظمى في الجبر الاعلى وقد ترد بالرفع الى كميات حقيقية او تدل على فساد مسألة كما سيأتي

(١١٨) تجذير حد مضاعف : اذا كان الحد مضاعفاً فقاعدته

جذر حاصل كميات يساوي حاصل جذورها

$$\sqrt{ب^{٢} هـ^{-٤} د^{٤}} = \sqrt{ب^{٢}} \times \sqrt{هـ^{-٤}} \times \sqrt{د^{٤}} = ب هـ^{-٢} د^{٢}$$

$$\sqrt[٣]{-٢٧ د^{٣} م^{٣}} = \sqrt[٣]{-٢٧} \times \sqrt[٣]{د^{٣}} \times \sqrt[٣]{م^{٣}} = -٣ د م$$

$$\sqrt[٤]{١٦ م^{٥} هـ^{٤}} = \sqrt[٤]{١٦} \times \sqrt[٤]{م^{٥}} \times \sqrt[٤]{هـ^{٤}} = ٢ هـ \sqrt[٤]{م^{٥}}$$

$$(ب^{٢} ى^{-١} د)^{\frac{١}{٢}} = ب^{\frac{٢}{٢}} \times ى^{-\frac{١}{٢}} \times د^{\frac{١}{٢}} = ب ى^{-\frac{١}{٢}} د^{\frac{١}{٢}}$$

(١١٩) تجذير الكسر : اذا كان الحد المفروض كسراً فقاعدته

جذر الكسر يساوي الخارج من جذر الصورة على جذر المخرج

لان الكسر يترقى برفع كل من جزئيه على حدة اي

$$\left(\frac{ب}{ه}\right)^{ن} = \frac{ب^{ن}}{ه^{ن}} \quad \text{بالعكس} \quad \sqrt[ن]{\frac{ب^{ن}}{ه^{ن}}} = \frac{\sqrt[ن]{ب^{ن}}}{\sqrt[ن]{ه^{ن}}} = \frac{ب}{ه}$$

$$\text{جذر } \frac{ب^{٣}}{د^{٣}} \text{ الكعبي} = \sqrt[٣]{\frac{ب^{٣}}{د^{٣}}} = \frac{\sqrt[٣]{ب^{٣}}}{\sqrt[٣]{د^{٣}}} = \frac{ب}{د}$$

$$\sqrt[٣]{\frac{-٢٧\,د^{٣}}{٨\,ب^{٣}س^{٣}}} = \frac{\sqrt[٣]{-٢٧\,د^{٣}}}{\sqrt[٣]{٨\,ب^{٣}س^{٣}}} = \frac{-٣\,د}{٢\,ب\,س}$$

$$\sqrt[٥]{\frac{٣٢\,د^{-١٠}م^{٥}}{٢٤٣\,ف^{٥}}} = \frac{\sqrt[٥]{٣٢\,د^{-١٠}م^{٥}}}{\sqrt[٥]{٢٤٣\,ف^{٥}}} = \frac{٢\,د^{-٢}م}{٣\,ف}$$

الفصل الثاني

تجذير عبارة مركبة

(١٢٠) تجذر عبارة جبرية مركبة من حدين او اكثر بالطرق الاربع الاتية .
١ً بالدلالة . ٢ً بالبسط ٣ً بمقتضى شروط الحد الاول والثاني من مرق كمية ثنائية ٤ً بمقتضى شروط جميع حدودها

١ً التجذير بالدلالة . — ضع اشارة الجذر ودليله على تلك الكمية او احصرها كحد واحد وعاملها نظيره

$$\text{الجذر المالي من } (ب + س) = \sqrt{ب + س} = (ب + س)^{\frac{١}{٢}}$$

$$\text{« الرابع من } (ب^{٢} - س + د) = \sqrt[٤]{ب^{٢} - س + د} = (ب^{٢} - س + د)^{\frac{١}{٤}}$$

$$\text{« النوني من } (د^{٢} - ه^{٢} + م)^{٧} = \sqrt[ن]{(د^{٢} - ه^{٢} + م)^{٧}} = (د^{٢} - ه^{٢} + م)^{\frac{٧}{ن}}$$

جذر $(\text{ب}-\text{س})^{٦}$ الكعبي $= \sqrt[٣]{(\text{ب}-\text{س})^{٦}} = (\text{ب}-\text{س})^{٢}$

٠ $-(\text{ب}+\text{د})^{١٠}$ الخامس $= -(\text{ب}+\text{د})^{\frac{١٠}{٥}} = -(\text{ب}+\text{د})^{٢}$

التجذير بالبسط : رق الحدود المطلوبة الى قوة الدليل الكسري

$(\text{ب}+\text{س})^{\frac{١}{٢}} = \text{ب}^{\frac{١}{٢}} + \frac{١}{٢}\text{ب}^{-\frac{١}{٢}}\text{د} - \frac{١}{٨}\text{ب}^{-\frac{٣}{٢}}\text{د}^{٢} + \frac{١}{١٦}\text{ب}^{-\frac{٥}{٢}}\text{د}^{٣} - \frac{٥}{١٢٨}\text{ب}^{-\frac{٧}{٢}}\text{د}^{٤}$

الجذر الرابع من $(\text{د}-\text{ه})^{٢} = (\text{د}-\text{ه})^{\frac{٢}{٤}}$

$= \text{د}^{\frac{٢}{٤}} - \frac{٢}{٤}\text{د}^{-\frac{١}{٤}}\text{ه} - \frac{٣}{٣٢}\text{د}^{-\frac{٥}{٤}}\text{ه}^{٢} - \frac{٥}{١٢٨}\text{د}^{-\frac{٩}{٤}}\text{ه}^{٣} - \frac{٤٥}{٢٠٤٨}\text{د}^{-\frac{١٢}{٤}}\text{ه}^{٤}$ الخ

الجذر الخامس من $(\text{ب}^{٢}+٢\text{د})^{٢} = (\text{ب}^{٢}+٢\text{د})^{\frac{٢}{٥}}$ رق اولاً $(\text{ك}+\text{ل})^{\frac{٢}{٥}}$

$\text{ك}^{\frac{٢}{٥}} + \frac{٢}{٥}\text{ك}^{-\frac{٣}{٥}}\text{ل} - \frac{٣}{٢٥}\text{ك}^{-\frac{٨}{٥}}\text{ل}^{٢} + \frac{٧}{١٢٥}\text{ك}^{-\frac{١٣}{٥}}\text{ل}^{٣}$ الخ

ثم عوض بالكمية $\text{ب}^{٢}$ عن ك ، ٢د عن ل

$\text{ب}^{\frac{٤}{٥}} + \frac{٦}{٥}\text{ب}^{-\frac{٦}{٥}}\text{د} - \frac{١٢}{٢٥}\text{ب}^{-\frac{١٦}{٥}}\text{د}^{٢} + \frac{٥٦}{١٢٥}\text{ب}^{-\frac{٢٦}{٥}}\text{د}^{٣}$ الخ

الجذر الكعبي من $(\text{ك}^{٢} - ٢\,\text{د}\,\text{س} + \text{ه})^{٢} = (\text{ك}^{٢} - ٢\,\text{د}\,\text{س} + \text{ه})^{\frac{٢}{٣}}$

رق $(\text{ن} - \text{ف} + \text{ه})^{\frac{٢}{٣}} = \text{ن}^{\frac{٢}{٣}} - \frac{٢}{٣}\text{ن}^{-\frac{١}{٣}}\text{ف} + \frac{٢}{٣}\text{ن}^{-\frac{١}{٣}}\text{ه} - \frac{١}{٩}\text{ن}^{-\frac{٤}{٣}}\text{ف}^{٢}$

$- \frac{١}{٩}\text{ن}^{-\frac{٤}{٣}}\text{ه}^{٢} + \frac{٢}{٩}\text{ن}^{-\frac{٤}{٣}}\text{ف}\,\text{ه}$ الخ

ضع عوض ن ، $\text{ك}^{٢}$ و ٢ د س عن ف

$\text{ك}^{\frac{٤}{٣}} - \frac{٤}{٣}\text{ك}^{-\frac{٢}{٣}}\text{د}\,\text{س} + \frac{٢}{٣}\text{ك}^{-\frac{٢}{٣}}\text{ه} - \frac{٤}{٩}\text{ك}^{-\frac{٨}{٣}}\text{د}^{٢}\text{س}^{٢} - \frac{١}{٩}\text{ك}^{-\frac{٨}{٣}}\text{ه}^{٢} + \frac{٤}{٩}\text{ك}^{-\frac{٨}{٣}}\text{د}\,\text{س}\,\text{ه}$

ملاحظة ١ ٠ — يمكن تمديد هاته الحدود الى ما لا نهاية له نظير كسر عشري كما نبهنا في الترقية الى قوة سلبية فان الكسر يتناقص واحداً واحداً فيعود سلبياً كما رأيت في الامثلة

ملاحظة ٢ ٠ — $\sqrt[\text{م}]{\text{ب}+\text{ك}} = \sqrt[\text{م}]{\text{ب}(١+\frac{\text{ك}}{\text{ب}})} = \text{ب}^{\frac{١}{\text{م}}}(١+\frac{\text{ك}}{\text{ب}})^{\frac{١}{\text{م}}}$

بما ان الواحد يستغنى عن كتابته في الحدود الوسطى لدى ترقية كمية ثنائية

يسهل العمل برد الكمية الثنائية الى هيئة واحد مع كسر عند البسط

$$(\text{ب} + \text{ك})^{\frac{1}{2}} = \text{ب}^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{\text{ك}}{\text{ب}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \text{ب}^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{\text{ك}}{3\,\text{ب}} - \frac{\text{ك}^2}{9\,\text{ب}^2} + \frac{5\,\text{ك}^3}{81\,\text{ب}^3} - \frac{10\,\text{ك}^4}{243\,\text{ك}^4}\right) \text{الخ}$$

٣ التجذير على موجب نظام الحد الاول والثاني من مرقى كمية ثنائية.
ترى من ترقية $(\text{ب} + \text{د})^{\text{ن}} = \text{ب}^{\text{ن}} + \text{ن}\,\text{ب}^{\text{ن}-1}\,\text{د} + $ الخ
اولاً ب الجزء الاول من الجذر $= \sqrt[\text{ن}]{\text{ب}^{\text{ن}}}$ اي الجذر المفروض من الحد الاول
ثانياً د الجزء الثاني من الجذر $= \dfrac{\text{ن}\,\text{ب}^{\text{ن}-1}\,\text{د}}{\text{ن}\,\text{ب}^{\text{ن}-1}}$ اي الخارج من الحد الثاني
على حاصل اسم الجذر في مرقى الجزء الاول منه الى قوة دليلها اقل من دليل الجذر بواحد
ثالثاً ان كان الجذر مركباً من ثلثة حدود فاكثر نظير $(\overline{\text{ب} + \text{د}} + \text{ه})^{\text{ن}}$
يعتبر الحدان معاً نظير حد واحد وتتم ترقيتهما وهكذا في التجذير بعد استخراج الحد الاول والثاني نفرضهما حداً واحداً وتتم العمل
فلنا من ذلك هذه القاعدة

١ نظم القوات من الدرجة العليا فما دون ثم خذ الجذر المفروض من الحد الاول فيكون لك الجزء الاول من الجذر المطلوب رقه الى قوة من اسم دليل الجذر واطرحه من نفس العبارة ونزّل الى الباقي الحد التالي واحفظه مقسوماً جديداً

٢ رق الجزء المستخرج الى قوة دليلها اقل من دليل الجذر بواحد ثم اضرب ما كان في هذا الدليل واقسم على الحاصل الباقي

المحفوظ فيكون لك الجزء الثاني من الجذر المطلوب

٣ً اعتبر الجزئين كحد واحد بمثابة الجزء الاول ورقهما الى قوة مناسم دليل الجذر واطرح المرقى من الكميات الاصلية واتم العمل كما سبق الى النهاية

ما هو الجذر الكعبي من $٨ك^{٣} - ١٢ك^{٢}د^{٢} + ٦ك\,د^{٤} - د^{٦}$ $(٢ك - د^{٢}$

$(٢ك)^{٣} = ٨ك^{٣}$

$(٢ك)^{٢} \times ٣ = ١٢ك^{٢}\ )\ -١٢ك^{٢}د^{٢}$

$(٢ك - د^{٢})^{٣} = ٨ك^{٣} - ١٢ك^{٢}د^{٢} + ٦ك\,د^{٤} - د^{٦}$

.. ..

الرابع من $ب^{٨} - ٤ب^{٦}د + ٦ب^{٤}د^{٢} - ٤ب^{٢}د^{٣} + د^{٤}$ $(ب^{٢} - د$

$ب^{٨} = (ب^{٢})^{٤}$

$٤ب^{٦} =)\ -٤ب^{٦}د = (ب^{٢})^{٣} \times ٤$

$ب^{٨} - ٤ب^{٦}د + ٦ب^{٤}د^{٢} - ٤ب^{٢}د^{٣} + د^{٤} = (ب^{٢} - د)^{٤}$

.. ..

ما هو الجذر المالي من

$ب^{٢} - ٤ب\,د + ٤د^{٢} + ٢ب\,هـ^{٢} - ٤د\,هـ^{٢} + هـ^{٤}$ $(ب - ٢د + هـ^{٢}$

$ب^{٢} = ب^{٢}$

$٢ب =)\ -٤ب\,د = ب^{١} \times ٢$

$ب^{٢} - ٤ب\,د + ٤د^{٢} = (ب - ٢د)^{٢}$

$٢ب - ٤د =)\ ٢ب\,هـ^{٢} - ٤د\,هـ^{٢} = (ب - ٢د)^{١} \times ٢$

$ب^{٢} - ٤ب\,د + ٤د^{٢} + ٢ب\,هـ^{٢} - ٤د\,هـ^{٢} + هـ^{٤} = (ب - ٢د + هـ^{٢})^{٢}$

.. ..

وبموجب هذه القاعدة تؤخذ جذور الاعداد ايضاً فتفرق القوات الى محطات بدؤها من اليمين وعدد المنازل في كل منها (ما سوى الاخيرة) يساوي دليل الجذر ويبدأ بالعمل من محطة اليسار لانها العليا وتفرق الجذور المأخوذة الى عشرات واحاد مثلاً ٨٥ = (٨٠ + ٥) و (١١٥) = (١٠٠ + ١٠ + ٥)

ما هو الجذر الرابع من

٦٥٬٩٧٥٠٠٬٠٦٢٥) ٢٨٥

١٦) = ٢^٤

الخارج ٨   ٤٩٩٬٧٥٠   (٣٢٠٠٠ = ٢٠^٣ × ٤

٦١ ٤٦٥٦   = ٢٨^٤

الخارج ٥   ٤٥٠٩٤٠   (٨٧٨٠٨=٢٨^٣ × ٤

٦٥ ٩٧٥٠ ٠٦٢٥   = ٢٨٥^٤

٠٠ ٠٠٠٠ ٠٠٠٠

ترى انه عوضاً عن ٢٨٠^٣ × ٤ اخذنا المقسوم عليه ٢٨^٣ × ٤ انما صرفنا النظر عن الثلثة الارقام الاخيرة ٦٢٥ مقابل ثلثة اصفار من المقسوم عليه فقس على ذلك .

٤ التجذير على موجب شروط كامل الحدود (و يندر استعماله لغير المالي والكعبي)

(ب + د)^٢ = ب^٢ + ٢ ب د + د^٢ = ب^٢ + (٢ ب + د) د

(ب + د)^٣ = ب^٣ + (٣ب^٢ + ٣ب د + د^٢) د

(ب + د)^٤ = ب^٤ + (٤ب^٣ + ٦ب^٢د + ٤ ب د^٢ + د^٣) د

فضلاً عن الشروط السابقة لنا من هاته الامثلة ملاحظة اخرى ان ما

بقي بعد اسقاط الجزء الاول يساوي الجزء الثاني من الجذر مضروباً بمقتضى الكميات المحصورة فيجب قسمة الباقي عليها و بمقتضى ذلك يكون الجزء الثاني من الجذر المالي د .

$$\text{د} = \frac{(\text{٢ب} + \text{د})\,\text{د}}{(\text{٢ب} + \text{د})} = \frac{\text{الباقي}}{\text{مضاعف الجزء الاول مع الجزء الثاني}}$$

قاعدة الجذر المالي :

١ً استعلم الجزء الاول من الجذر واطرح مربعه من الكمية المفروضة ثم اقسم الباقي على مضاعفه فيخرج الجزء الثاني

٢ً اضرب الجزء الثاني في مجموعه الى مضاعف الجزء الاول واطرح الحاصل من الباقي (لا من الكمية الاصلية)

٣ً اقسم الباقي على مضاعف الجذر الموجود فيخرج الجزء الثالث افعل به كما تقدم الى نهاية العمل

د^{٢} — ٤ب د + ٤ب^{٢} + ٢د ى — ٤ب ى + ى^{٢} (د — ٢ب + ى

د^{٢}

٢د — ٢ب) — ٤ب د + ٤ب^{٢}

× — ٢ب — ٤ب د + ٤ب^{٢}

٢د — ٤ب + ى) ٢د ى — ٤ب ى + ى^{٢}

× ى ٢د ى — ٤ب ى + ى^{٢}

.. .. ..

تقسم اولاً على

٢ × د

ثم على

٢ (د — ٢ب)

وهكذا في استخراج جذور الاعداد

١٫٥٦٫٢٥	(١٢٥	
١		
٥٦	(٢٠٢	٢٠=٢×١٠
٤٤		٢ الخارج
١٢٢٥	(٢٤٥	٢٤٠=٢×١٢٠
١٢٢٥		٥ الخارج
....		

وبمقتضى ما سبق يكون الجزء الثاني من الجذر الكعبي د

$$د_١ = \frac{(٣ب^٢+٣بد+د^٢)د}{٣ب^٢+٣بد+د^٢} = \frac{الباقي}{٣ب^٢+٣بد+د^٢}$$

قاعدة الجذر الكعبي

١ً استعلم الجزء الاول من الجذر واطرح مكعبه من الكمية الاصلية ثم اقسم الباقي على ثلثة امثال مربعه فيخرج الجزء الثاني

٢ً اضرب الجزء الثاني من الجذر في مجتمع (ثلثة امثال مربع الاول + ثلثة امثال حاصل الجزء الاول في الثاني + مربع الجزء الثاني) واطرح الحاصل من الباقي

٣ً اقسم الباقي على ثلثة امثال مربع الجذر الموجود فيخرج الجزء الثالث تصرف به كما سبق الى نهاية العمل

ك^{٦} − ٣ك^{٤}ل س^{٢} + ٣ك^{٢}ل^{٢}س^{٤} − ل^{٣}س^{٦} (ك^{٢} − ل س^{٢}

ك^{٦}

٣ك^{٤} = } − ٣ك^{٤}ل س^{٢} + ٣ك^{٢}ل^{٢}س^{٤} − ل^{٣}س^{٦} { = ٣ (ك^{٢})^{٢}

− ٣ك^{٢}ل س^{٢} = = ٣ × ك^{٢} × − ل س^{٢}

+ ل^{٢}س^{٤} = = (− ل س^{٢})^{٢}

المجتمع في − ل س^{٢} — ٣ك^{٤}ل س^{٢} + ٣ك^{٢}ل^{٢}س^{٤} − ل^{٣}س^{٦}

.. .. ..

ومثل ذلك استخراج جذر الاعداد الكعي

٣٧٩٦٤١٦ (١٥٦

١

٢٧٩٦ (٣٠٠ = ٣ × ١٠^{٢} يخرج ٥

١٥٠ = ٣ × ١٠ × ٥

٢٥ = ٥^{٢}

٢٣٧٥ | ٤٧٥ × ٥

٤٢١٤١٦ (٦٧٥٠٠ = ٣ × ١٥٠^{٢} يخرج ٦

٢٧٠٠ = ٣ × ١٥٠ × ٦

٣٦ = ٦^{٢}

٤٢١٤١٦ | ٧٠٢٣٦ × ٦

......

(١٢١) ليكن المطلوب جذر د + ك وقد علم جذر د القريب منه جداً فحسب (١٠٠) (د + $\frac{ك}{ن}$)^{ن} : د^{ن} :: د + ك : د وجذرها النوني (١٠٥)

د + ك/ن : د :: (د + ك)^(١/ن) : د^(١/ن) وبقسمة الزوج الاول على د (١٠٨)

١ + ك/(ن د) : ١ :: ^ن√(د + ك) : د^(١/ن) وحسب (١٠٤)

^ن√(د + ك) = د^(١/ن) + (ك د^(١/ن))/(ن د) = ^ن√د + ك/(ن د^((ن−١)/ن))

فلنا هذه القاعدة لاستخراج جذر الاعداد التقريبي

خذ جذر المحطتين الاخريين واطرح مرقاه من العدد المفروض (ومابقي ك) اقسم الباقي على حاصل اسم الجذر في مرقى الجذر الموجود الى قوة دليلها اقل من دليل الجذر بواحد واضف الخارج الى الجذر الموجود فيكون لك جذر العدد المطلوب على التقريب

√(٩٦٣،٦٧٨٩) = √٩٦١ اي ٣١ + ٢،٦٧٨٩/(٣١ × ٢) = ٣١،٠٤٣٢

ولو فرض العدد كله صحيحاً وجب تقديم الفاصلة منازل قدر المحطات الباقية

∛(١٧٢٨،٢٣٤٥٨٧٨٩٣٢١٦)   ∛١٧٢٨ = ١٢

ثم ١٢ + ٠،٢٣٤٥٨٧٨٩٣/(١٢^٢ × ٣) = ١٢،٠٠٠٥٤٢٩٨ ولو فرض صحيحاً لكان الجذر ١٢٠٠٠٥،٤٢٩٨ فراجع العمل بالقاعدة الاصلية

^٤√(٤٣٠٤٦٩٤٢،٥٦٧٨٩١٢٣٤٥٦٧٨٩٦٥٧٤٣٢)

= ^٤√(٤٣٠٤٦٧٢١) اي ٨١ + ٢٢٨،٥٦٧٨/(٨١^٣ × ٣)

= ٨١،٠٠٠١٠٤٢٢٩٧ وباعتباره صحيحاً ٨١٠٠٠١٠،٤٢٢٩٧

تمرين

(١) خذ جذر — ٢٧ د^{٣} ، ٨ د^{٣}س^{٦} ، ٦٤ م^{٣}ف$^{-٣}$ الكعبي

(٤) . . ٤ د^{٢}س^{٤} ، ٢٥ د^{٦}م$^{-٨}$ ، ١٢ د^{٤}ن$^{-٦}$ المالي

(٧) . . ١٦ م^{٤}ن^{٨} ، ٨١ ب$^{-٨}$ف^{١٢} ، — ١٦ د^{٤} الرابع

(١٠) . . ٣٢ ف^{٥}م^{١٠} ، ٢٤٣ ن$^{-٥}$ف$^{-١٥}$ ، — م^{٥}ن^{٢٠} الخامس

(١١) $\frac{٤\ د^{٢}س^{٤}}{٩م^{-١}ن^{٦}}$ المالي ، (١٢) $\frac{-٣٢\ ب^{١٠}ن^{-٥}}{٢٤٣\ ب^{١٠}د^{٥}}$ الخامس

(١٣) $\frac{-٥\ ب^{٦}}{٦٤\ ف^{١٢}}$ السادس ، (١٤) $\frac{-٨\ د^{٣}ن^{٦}}{٢٧\ ب^{٦}م^{-٣}}$ الكعبي

(١٥) $\frac{د^{ن}ف^{٢ن}}{م^{ن}}$ النوني (١٦) — د^{م} الميمي

اكتب بهيئة الجذر او الدليل الكسري

(١٧) جذر ب^{٢} — س المالي (١٨) جذر (ب + م)^{ن} الكعبي

(١٩) جذر (د^{٢} — ف^{٣} + م)^{٢} الرابع (٢٠) جذر (س^{٢} — ف^{٢} + ٢د)^{٢} النوني

(٢١) ابسط الجذر المالي من ت^{٢} + ب^{٢} اي (ت^{٢} + ب^{٢})$^{\frac{١}{٢}}$

(٢٢) . : الكعبي من (ف^{٣} + د^{٣})$^{-١}$

(٢٣) . . الخامس من (ب^{٢} — د)^{٢}

(٢٤) . . الرابع من (١ — ف^{٢})$^{-٢}$ و (٢٥) من (ت^{٢} — ى^{٢})^{٢}

(٢٦) ابسط $\frac{١}{\sqrt{ت+ك}}$ او (ت + ك)$^{-\frac{١}{٢}}$ ، (١ — ك)$^{-\frac{٢}{٣}}$

جذر بالطريقة الثالثة

(٢٧) ما هو الجذر المالي من ن^{٦} — ٢ن^{٥} + ن^{٤} — ٢ن^{٣} + ن^{٢}

(٢٨) . الكعبي من د^{٣} + ٣د^{٢}ب + ٣د^{٢}س + ٣دب^{٢} + ٦دب س

+٣دس^{٢}+ب^{٣}+٣ب^{٢}س+٣ب س^{٢}+س^{٣}

(٢٩) . . الرابع من ١٦م^{٤}—٩٦م^{٣}ك+٢١٦م^{٢}ك^{٢}+٢١٦م ك^{٣}
+٨١ك^{٤}+ف^{٤}+٨ف^{٣}+٢٤ف^{٢}+٣٢ف+١٦

(٣٠) . . الخامس من ك^{١٠}+١٥ك^{٨}ى^{٢}+٩٠ك^{٦}ى^{٤}+٢٧٠ك^{٤}ى^{٦}
+٤٠٥ك^{٢}ى^{٨}+٢٤٣ى^{١٠}

(٣١) . . السادس من ٧٢٩ك^{٦}+٢٩١٦ك^{٥}ى+٤٨٦٠ك^{٤}ى^{٢}
+٤٣٢٠ك^{٣}ى^{٣}+٢١٦٠ك^{٢}ى^{٤}+٥٧٦كى^{٥}+٦٤ى^{٦}

(٣٢) ما هو الجذر المالي من ب^{٤}+٤ب^{٢}س+٤س^{٢}—٤ب^{٢}—٨س+٤

(٣٣) . . . الكعبي من ف^{٦}—٦ف^{٥}+١٥ف^{٤}—٢٠ف^{٣}+١٥ف^{٢}
—٦ف+١

(٣٤) . . . الخامس من م^{٥}+٥م^{٤}+١٠م^{٣}+١٠م^{٢}+٥م+١

خذ بالطريقة الرابعة

(٣٨) الجذر المالي من ١—٤د+٤د^{٢}+٢س—٤دس+س^{٢}

(٣٩) . . . هـ^{٢}+٢هـد+د^{٢}+٢هـس+٢دس+س^{٢}

(٤٠) . . . ٤ف^{٢}—١٢فس+٩س^{٢}+١٦فب—٢٤سب
+١٦ب^{٢}

(٤١) . . . ٤م^{٤}—٤م^{٣}+١٣م^{٢}—٦م+٩

(٤٢) . الكعبي من د^{٣}—٦د^{٢}ب+١٢دب^{٢}—٨ب^{٣}

(٤٣) . . . ب^{٦}+٣ب^{٥}—٣ب^{٤}—١١ب^{٣}+٦ب^{٢}+١٢ب—٨

(٤٤) . . . ٨ك^{٦}—١٢ك^{٤}د^{٢}+٦ك^{٢}د^{٤}—د^{٦}

(٤٥) . . . ك^{٦}—٣ك^{٤}دب+٣ك^{٢}د^{٢}ب^{٢}—د^{٣}ب^{٣}

$\sqrt[٢]{٧٢٣٥}$ $\sqrt[٣]{٤٨٣٢٤٩}$ $\sqrt[٥]{٣٣٥٥٤٤٣٢}$

الباب السابع

في الكميات الجذرية

(١٢٢) الكميات اما منطقة تماماً وهي ما لم تقيد باشارة الجذر او الدليل الكسري واما منطقة بهيئة صماء وهي الكميات الجذرية او ذات الدليل الكسري التي يمكن اخذ جذرها تماماً واما صماء حقيقة وهي الكميات الجذرية او ذات الدليل الكسري التى لا يمكن اخذ جذرها تماماً

مثال المنطقة ٢ (ب — س) ٤ د^{٢} ٥ (ب + س)^{٢} ومثال المنطقة بهيئة صماء $\sqrt[٢]{٤}$ اي ٢ $\sqrt[٣]{٨د^{٣}}$ اي ٢د $(ب^{٢} — ٢ب س + س^{٢})^{\frac{١}{٢}}$ اي ب — س

مثال الصماء $\sqrt[٢]{٢}$ $\sqrt[٣]{د^{٢}}$ ب$^{\frac{١}{٤}}$ $\sqrt[٣]{(ب — س)^{٤}}$ (د — ب)$^{\frac{٥}{٣}}$

الفصل الاول

في تحويل المعادلات الجذرية

(١٢٣) مرّ بك ان الدليل الكسري يراد بصورته دليل القوة ومخرجه دليل الجذر (١١٦) وان ترقية الكمية بضرب الدليل وتجذيرها بقسمته وبما ان قيمة الكسر لا تختلف بضرب ركنيه في عدد واحد يمكن تحويل الكميات الجذرية من هيئة الى اخرى بالقاعدة الاتية

رقِّ الكمية الى قوة وجذرها من دليل يماثلها

وكيفية العمل حسبما ذكر هي ان نضرب دليل القوة ودليل الجذر بكمية واحدة او نقسمهما معاً على كمية واحدة حتى يساوي دليل الجذر الدليل المطلوب وعليه حول الى هيئة

	الجذر المالي	الكعبي	الميمي	ضع بهيئة
$٢ =$	$\sqrt{٢^{٢}}$ اي ٤	$\sqrt[٣]{٢^{٣}}=\sqrt[٣]{٨}$	$\sqrt[م]{٢^{م}}$	الخامس
$٣ب =$	$\sqrt{٩ب^{٢}}$	$\sqrt[٣]{٢٧ب^{٣}}$	$\sqrt[م]{(٣ب)^{م}}$	الرابع
$ب+س=$	$\sqrt{(ب+س)^{٢}}$	$(ب+س)^{\frac{٣}{٣}}$	$\sqrt[م]{(ب+س)^{م}}$	السادس
$ف^{٢} =$	$ف^{\frac{٤}{٢}}$	$\sqrt[٣]{ف^{٦}}$	$\sqrt[م]{ف^{٢م}}$	السابع
$(د-ب)^{ن}=$	$\sqrt{(د-ب)^{٢ن}}$	$\sqrt[٣]{(د-ب)^{٣ن}}$	$\sqrt[م]{(د-ب)^{من}}$	الثالث

$$\frac{ن\,ب^{٢}}{(س-ف)^{٢}}=\sqrt{\frac{ن^{٢}ب^{٤}}{(س-ف)^{٤}}}\qquad \sqrt[٣]{\frac{ن^{٣}ب^{٦}}{(س-ف)^{٦}}}\qquad \sqrt[م]{\frac{ن^{م}ب^{٢م}}{(س-ف)^{٢م}}}$$

$$ب^{\frac{١}{٢}}=\qquad \sqrt[٣]{ب^{\frac{٣}{٢}}}\qquad \sqrt[م]{ب^{\frac{م}{٢}}}=\sqrt[ه]{ب^{\frac{ه}{٢}}}$$

$$\sqrt[٥]{د^{٣}}=\sqrt{د^{\frac{٣\times٢}{٥}}}=\sqrt{د^{\frac{٦}{٥}}}\qquad \sqrt[٣]{د^{\frac{٩}{٥}}}\qquad \sqrt[م]{ك^{\frac{٣م}{٥}}}\qquad \text{الرابع}$$

$$(د+ب)^{\frac{٢}{٤}}=\sqrt{(د+ب)^{\frac{٤}{٤}}}\qquad \sqrt[٣]{(د+ب)^{\frac{٦}{٤}}}\qquad \sqrt[م]{(د+ب)^{\frac{٢م}{٤}}}\qquad \text{النوني}$$

نتيجة ١٠ — يمكن تحويل عدة كميات الى دليل جذر مشترك بتعين باستعلام المخرج المشترك للدلائل الكسرية او دلائل الجذور

$$ب \text{ و } م^{\frac{١}{٢}}\,(ب+س)^{\frac{١}{ن}}=ب^{\frac{٢ن}{٢ن}}\qquad م^{\frac{ن}{٢ن}}\qquad (ب+س)^{\frac{٢}{٢ن}}$$

$$د^{٢}\;م^{\frac{٢}{٣}}\;(ه-ك)^{\frac{٢}{ن}}=\sqrt[٣ن]{د^{٦ن}}\qquad \sqrt[٣ن]{م^{٢ن}}\qquad \sqrt[٣ن]{(ه-ك)^{٦}}$$

$$\sqrt[٥]{د}\;\sqrt{ب^{٣}}\;\sqrt[٣]{(س-ف)^{٢}}=\sqrt[٣٠]{د^{٦}}\qquad \sqrt[٣٠]{ب^{٤٥}}\qquad \sqrt[٣٠]{(س-ف)^{٢٠}}$$

نتيجة ٢٠ — رأيت ان ضلعين من جذر واحد يحصران معاً باشارة الجذر لان جذر حاصل عدة كميات يساوي حاصل جذورها (١١٨) اي $\sqrt{ب}\times\sqrt{ك}=\sqrt{ب\,ك}$ فلنا هذه القاعدة لادخال اضلاع حد تحت علامة جذر واحدة

حول الضلعين الى دليل جذر مشترك ثم احصرهما معاً بذاك الدليل

$$\sqrt{ب}\,\sqrt[3]{ك}=\sqrt[6]{ب^{3}}\,\sqrt[6]{ك^{2}}=\sqrt[6]{ب^{3}ك^{2}}$$

$$\sqrt{2}\,\sqrt[3]{د}\,\sqrt{م}=\sqrt[6]{8د^{2}}\,\sqrt[6]{م^{3}}=\sqrt[6]{8د^{2}م^{3}}$$

$$\sqrt{ف}\,\sqrt[5]{(ب-س)^{2}}=\sqrt[10]{ف^{5}}\,\sqrt[10]{(ب-س)^{4}}=\sqrt[10]{ف^{5}(ب-س)^{4}}$$

$$د^{\frac{2}{3}}\,ب^{\frac{3}{5}}=د^{\frac{10}{15}}\,ب^{\frac{9}{15}}=(د^{10}ب^{9})^{\frac{1}{15}}$$

$$\sqrt[3]{ب}\,\sqrt{د}=\sqrt[6]{ب^{2}}\,\sqrt[6]{د^{3}}=\sqrt[6]{ب^{2}د^{3}}$$

$$\sqrt{د^{2}}\,\sqrt[5]{د^{2}}\,\sqrt{س^{2}}=\sqrt[10]{د^{10}}\,\sqrt[10]{د^{4}}\,\sqrt{س^{2}}=\sqrt[10]{د^{14}}\,\sqrt{س^{2}}$$

$$\sqrt{ب}\,\sqrt[4]{د}\,\sqrt{ح}=\sqrt[4]{ب^{2}}\,\sqrt[4]{د}\,\sqrt{ح}=\sqrt[4]{ب^{2}د}\,\sqrt{ح}=\sqrt[4]{ب^{2}د}\,\sqrt[4]{ح^{2}}=\sqrt[4]{ب^{2}دح^{2}}$$

(١٢٤) بالعكس لنا القاعدة الآتية لاخراج بعض الكمية من تحت علامة الجذر ان امكن :

حل الكمية الى ضلعين احدهما قوة تامة من اسم الجذر ثم خذ جذر هذا الضلع واضربه في جذر الاخر

$$\sqrt{8}=\sqrt{4\times 2}=2\sqrt{2}$$

$$\sqrt[3]{ب^{4}د^{5}}=\sqrt[3]{ب^{3}د^{3}\times بد^{2}}=ب\,د\,\sqrt[3]{بد^{2}}$$

$$\sqrt[5]{\frac{ب^{7}د^{2}}{م^{7}د^{5}}}=\sqrt[5]{\frac{ب^{5}\times ب^{2}د^{2}}{م^{5}د^{5}\times م^{2}}}=\frac{ب}{م\,د}\sqrt[5]{\frac{ب^{2}د^{2}}{م^{2}}}$$

$$\sqrt{س^{4}-س^{2}د^{2}}=\sqrt{س^{2}(س^{2}-د^{2})}=س\sqrt{س^{2}-د^{2}}$$

$$\sqrt{\frac{1}{ب^{2}}-\frac{1}{د^{2}}}=\sqrt{\frac{1}{ب^{2}}\left[1-\left(\frac{ب^{2}}{د^{2}}\right)\right]}=\frac{1}{ب}\sqrt{1-\frac{ب^{2}}{د^{2}}}$$

الفصل الثاني

في جمع الكميات الجذرية

(١٢٥) الكميات الجذرية اما ان تكون متشابهة اصلاً واما ان تحول الى كميات متشابهة باخراج بعضها من تحت علامة الجذر فتجمع وتصلح نظير باقي الحدود المتشابهة بجمع مسمياتها . مثلاً

$$\text{٢}\sqrt{\text{م}} \qquad \text{٢ب}\sqrt{\text{٣(س}-\text{ب)}} \qquad \text{٢ب س}\sqrt[3]{\text{٢(د}^{2}-\text{ه)}}$$

$$\text{٣}\sqrt{\text{م}} \qquad -\text{٣ب}\sqrt{\text{٣(س}-\text{ب)}} \qquad -\text{ب س}\sqrt[3]{\text{٢(د}^{2}-\text{ه)}}$$

$$-\text{٤}\sqrt{\text{م}} \qquad \text{٨ب}\sqrt{\text{٣(س}-\text{ب)}} \qquad -\text{٦ب س}\sqrt[3]{\text{٢(د}^{2}-\text{ه)}}$$

$$\text{المجتمع } \sqrt{\text{م}} \qquad \text{٧ب}\sqrt{\text{٣(س}-\text{ب)}} \qquad -\text{٥ب س}\sqrt[3]{\text{٢(د}^{2}-\text{ه)}}$$

$$\sqrt{\text{١٨د}^{2}} = \text{٣د}\sqrt{\text{٢د}} \qquad \sqrt{\text{ب}^{3}-\text{س ب}^{2}} = \text{ب}\sqrt{\text{ب}-\text{س}}$$

$$\sqrt{\text{٣٢د}} = \text{٤}\sqrt{\text{٢د}} \qquad \sqrt{\text{س}^{2}\text{ب}-\text{س}^{3}} = \text{س}\sqrt{\text{ب}-\text{س}}$$

$$\text{المجموع } (\text{٣د}+\text{٤})\sqrt{\text{٢د}} \qquad (\text{ب}+\text{س})\sqrt{\text{ب}-\text{س}}$$

$$\text{٤ب}\sqrt[3]{\text{ب}^{2}\text{د}^{4}} = \text{٤ب}\sqrt[3]{\text{ب}^{3}\text{د}^{3}}\sqrt[3]{\text{د}} = \text{٤ب}^{2}\text{د}\sqrt[3]{\text{د}}$$

$$\text{د}\sqrt[3]{\text{٨ب}^{6}\text{د}} = \text{د}\sqrt[3]{\text{٨ب}^{6}}\sqrt[3]{\text{د}} = \text{٢ب}^{2}\text{د}\sqrt[3]{\text{د}}$$

$$-\sqrt[3]{\text{١٢٥ب}^{6}\text{د}^{4}} = -\sqrt[3]{\text{١٢٥ب}^{6}\text{د}^{3}}\sqrt[3]{\text{د}} = -\text{٥ب}^{2}\text{د}\sqrt[3]{\text{د}}$$

$$\text{المجتمع } \quad \text{ب}^{2}\text{د}\sqrt[3]{\text{د}}$$

اما باقي الحدود الجذرية الغير المتشابهة التي تختلف بالكميات او دلائل القوات او دلائل الجذور فتجمع كباقي الحدود البسيطة فتربط بعلاماتها انما لا يمكن اصلاحها

$$\sqrt[3]{\text{ب}} + \sqrt{\text{ب}} \qquad \sqrt{\text{٢د}} + \sqrt{\text{٣د}} \qquad \sqrt[5]{\text{٣ب}^{2}\text{د}} + \sqrt[5]{\text{٣ب د}^{2}}$$

الفصل الثالث

في طرح الكميات الجذرية

(١٢٦) تطرح الكميات الجذرية نظير غيرها بابدال علامة المطروح ثم جمعه الى المطروح منه كما سبق

من	$\sqrt{٢دف}$	$-\sqrt[٢]{(ب+س)^{ن}}$	$٥\sqrt[٢]{٢}$
اطرح	$-٣\sqrt{٢دف}$	$-٣\sqrt[٢]{(ب+س)^{ن}}$	$٢\sqrt{٢}$
الباقي	$٤\sqrt{٢دف}$	$\sqrt[٢]{(ب+س)^{ن}}$	$٣\sqrt{٢}$

من	$\sqrt{٧٥}=٥\sqrt{٣}$	$\sqrt{١٦ت^{٢}ك}=٤ت\sqrt{ك}$
اطرح	$\sqrt{٤٨}=٤\sqrt{٣}$	$\sqrt{٤ت^{٢}ك}=٢ت\sqrt{ك}$
الباقي	$\sqrt{٣}$	$٢ت\sqrt{ك}$

من $\sqrt[٤]{٨(٢د-\sqrt{٤س})}=\sqrt[٤]{٨\times٢(د-\sqrt{س})}=\sqrt[٤]{١٦}\sqrt{د-\sqrt{س}}$

اطرح $\sqrt[٣]{٥(٥د-\sqrt{٢٥س})}=\sqrt[٣]{٥\times٥(د-\sqrt{س})}=\sqrt{١٥}\sqrt{د-\sqrt{س}}$

الباقي $\sqrt{د-\sqrt{س}}$

من $٣\sqrt{د^{٢}ب(ب-\sqrt[٢]{ب^{٢}س})}=٣د\sqrt{ب^{٢}(١-\sqrt[٢]{س})}=٣دب\sqrt{١-\sqrt[٢]{س}}$

اطرح $٢ب\sqrt{د(د-\sqrt[٢]{د^{٢}س})}=٢ب\sqrt{د^{٢}(١-\sqrt[٢]{س})}=٢دب\sqrt{١-\sqrt[٢]{س}}$

الباقي $دب\sqrt{١-\sqrt[٢]{س}}$

الفصل الرابع

في ضرب الكميات الجذرية

(١٢٧) وسط بين الكميات علامة الضرب ثم ادخلها تحت اشارة جذر واحدة اذا اردت حسبما مر

$$\sqrt[ن]{ب} \times \sqrt[ن]{د} = \sqrt[ن]{ب د} \qquad \sqrt[3]{د^{2}} \times \sqrt[5]{د^{3}} = \sqrt[15]{د^{10}} \times \sqrt[15]{د^{9}} = \sqrt[15]{د^{19}}$$

وذلك لا يختلف بشيء عن ضرب الكميات ذات المسمى الكسري لان

$$ب^{\frac{1}{ن}} \times د^{\frac{1}{ن}} = (ب د)^{\frac{1}{ن}} \qquad د^{\frac{2}{3}} \times د^{\frac{3}{5}} = د^{\frac{10}{15}} \times د^{\frac{9}{15}} = د^{\frac{19}{15}}$$

$$\sqrt{ب + ه} \times \sqrt{ب - ه} = \sqrt{(ب + ه)(ب - ه)} = \sqrt{ب^{2} - ه^{2}}$$

$$\sqrt{12 ك د} \times \sqrt{3 ك د} = \sqrt{36 ك^{2} د^{2}} = 6 ك د$$

$$\sqrt[4]{ت+ب} \times \sqrt[4]{ت+ب} = \sqrt[4]{(ت+ب)^{2}} = \sqrt{ت+ب} = \sqrt[4]{(ت+ب)^{2}}$$

$$\sqrt{ك^{-1}} \times \sqrt{ك} = \sqrt{ك^{-1} \times ك} = 1$$

$$\sqrt{\frac{2}{ح}} \times \sqrt{\frac{1}{م}} = \sqrt{\frac{2}{ح} \cdot \frac{1}{م}} = \sqrt{\frac{2}{ح م}}$$

$$\sqrt{ب^{2}} \times \sqrt{د - ه} = \sqrt{ب^{2}(د - ه)} = \sqrt{ب^{2}د - ب^{2}ه}$$

(١٢٨) اذا كانت الكميات الجذرية ذات مسميات يقتضي ضربها وكتابة حاصلها امام حاصل الكميات الجذرية

$$ت\sqrt{ب} \times -د\sqrt{ن} = -ت د\sqrt{ب ن}$$

$$ك^{ن}\sqrt{ك^{-1}} \times ك^{-ن}\sqrt{ك^{2}} = ك^{ن-ن}\sqrt{ك^{2-1}} = 1$$

$$2م\sqrt[3]{د} \times 3بم\sqrt[3]{2(د-س)} = 6م^{2}ب\sqrt[3]{27د^{2} \times 4(د-س)^{2}}$$

$$-ت\sqrt{ب+ك} \times -2ى\sqrt{ب-ك} = 2تى\sqrt{ب^{2}-ك^{2}}$$

(١٢٩) اذا كان احد المضروبين او كلاهما مركبا فاضرب كل جزء من المضروب في كل جزء من المضروب فيه كما مر في ضرب الكميات البسيطة

$(\sqrt{ب}+\sqrt{د})\times ٢\sqrt{ن}=٢\sqrt{ب ن}+٢\sqrt{د ن}$

$(\sqrt[٢]{ن^٢}+ف)\times ٢ف\sqrt[٢]{د}=٢ف\sqrt[٢]{ن^٢د}+٢ف^٢\sqrt[٢]{د}$

$(\sqrt[٣]{د^٢}+٣\sqrt{ن+ب})\times ٢\sqrt{س}=٢\sqrt[٦]{د^٤س^٣}+٦\sqrt{س(ن+ب)}$

$(\sqrt[٢]{(ب^٢+د)^٢}-ك)\times \sqrt[٢]{ب^٢+د}=ب^٢+د-ك\sqrt[٢]{ب^٢+د}$

$(ن+\sqrt{م})(\sqrt{ح}-د)=ن\sqrt{ح}+\sqrt{م ح}-ن د-د\sqrt{م}$

(١٣٠) ما مر من النظريات في ضرب الكميات البسيطة يصدق على الكميات الجذرية ايضاً كما ترى من الامثلة الاتية

$(ب+\sqrt{م})(ب+\sqrt{م})=ب^٢+٢ب\sqrt{م}+م$ نظ (١)

$(٣د-\sqrt{ن})(٣د-\sqrt{ن})=٩د^٢-٦د\sqrt{ن}+ن$ (٢)

$(ب+\sqrt{س})(ب-\sqrt{س})=ب^٢-س$ (٣)

$(ب+\sqrt{ب^٢-د})(ب-\sqrt{ب^٢-د})=ب^٢-(ب^٢-د)=د$

ملاحظة : ترى من المثال الاخيران كمية بسيطة نظير د تحل الى ضلعين هما $(ب+\sqrt{ب^٢-د})\ (ب-\sqrt{ب^٢-د})$

الفصل الخامس

في قسمة الكميات الجذرية

(١٣١) يدل على قسمة الكميات الجذرية ايضاً بوضع المقسوم على المقسوم عليه بهيئة كسر دارج

$$\sqrt{٣}\div\sqrt[٢]{٥}=\frac{\sqrt{٣}}{\sqrt[٢]{٥}}$$ وهكذا $$\frac{\sqrt[٢]{(ب+س)^٢}}{\sqrt[٢]{ب-س}}$$ و $$\frac{\sqrt[٢]{٢ن}}{\sqrt[٢]{٣ن}}$$

اما القسمة بالعمل فتتم هكذا

حوّل المقسومين الى دليل جذر مشترك اذا لزم ثم اقسم مجذور المقسوم

على مجذور المقسوم عليه وخذ جذر الخارج من ذلك الدليل المشترك

مثلاً $\frac{\sqrt[ن]{ب}}{\sqrt[ن]{ف}} = \sqrt[ن]{\frac{ب}{ف}}$ ، $\frac{\sqrt[م]{٢}}{\sqrt[م]{٣}} = \sqrt[م]{\frac{٢}{٣}}$ ، $\frac{\sqrt[٣]{(ب+س)^٢}}{\sqrt[٣]{د-ك}} = \sqrt[٣]{\frac{(ب+س)^٢}{د-ك}}$

$\frac{\sqrt[ن]{ب^٣}}{\sqrt[ن]{ب^٢}} = \sqrt[ن]{ب}$ ، $\frac{\sqrt[م]{ب^٢-س^٢}}{\sqrt[م]{ب+س}} = \sqrt[م]{ب-س}$ ، $\frac{\sqrt[٣]{ب^٢}\ \sqrt[ن]{(س+ن)^٢}}{\sqrt[٣]{ب}\ \sqrt[ن]{س+ن}}$

$= \sqrt[٣]{ب}\ \sqrt[ن]{(س+ن)^٢}$

$\frac{\sqrt[م]{د}}{\sqrt[٢]{ح}} = \sqrt[١٠]{\frac{د^٢}{ح^م}}$ ، $\frac{\sqrt[٣]{(ب+س)}}{\sqrt[٢]{ف-ك}} = \frac{\sqrt[٦]{(ب+س)^٢}}{\sqrt[٦]{(ف-ك)^٣}} = \sqrt[٦]{\frac{(ب+س)^٢}{(ف-ك)^٣}}$

$\frac{\sqrt[ن]{ب^٢}}{\sqrt[م]{ب^٢}} = \frac{\sqrt[من]{ب^{١٠}}}{\sqrt[من]{ب^{٢ن}}} = \sqrt[من]{ب^{١٠-٢ن}}$

$\frac{\sqrt[م]{٤(ب+س)^٢}}{\sqrt[٢]{٢(ب+س)}} = \frac{\sqrt[١٠]{١٦(ب+س)^٢}}{\sqrt[١٠]{٣٢(ب+س)^م}} = \sqrt[١٠]{\frac{ب+س}{٢}}$

اما اذا تركب كلا المقسومين او احدهما فالعمل بذلك نظير ما مر في قسمة الكميات الغير الجذرية

(١٠ $\sqrt[٣]{٨١ب} - ٨\sqrt[٣]{٣ب}$) $+ ٢\sqrt[٣]{٣ب} = ٥\sqrt[٣]{٢٧} - ٤ = ١١$

$\frac{٥\sqrt{كب} - ١٠\sqrt{ك(ب+س)}}{\sqrt{ب} - ٢\sqrt{(ب+س)}} = \frac{٥\sqrt{ك}(\sqrt{ب} - ٢\sqrt{ب+س})}{\sqrt{ب} - ٢\sqrt{ب+س}} = ٥\sqrt{ك}$

$٩\sqrt[٣]{٢٥٦} - ٣\sqrt[٣]{٤ب}$ على $٣\sqrt[٣]{٤} = ٣\sqrt[٣]{٦٤} - \sqrt[٣]{ب} = ١٢ - \sqrt[٣]{ب}$

اقسم $\sqrt{٢ى} - ١$ على $\sqrt[١٠]{٢ى} - ١$:

عليه — المقسوم — الخارج

$$\sqrt[10]{2ى} - 1 \;)\; \sqrt{2ى} - 1 \;(\; \sqrt[5]{4ى^{2}} + \sqrt[10]{8ى^{3}} + \sqrt[5]{2ى} + \sqrt[10]{2ى} + 1$$

$$\sqrt{2ى} - \sqrt[5]{4ى^{2}}$$

$$\sqrt[5]{4ى^{2}} - 1$$

$$\sqrt[5]{4ى^{2}} - \sqrt[10]{8ى^{3}}$$

$$\sqrt[10]{8ى^{3}} - 1$$

$$\sqrt[10]{8ى^{3}} - \sqrt[5]{2ى}$$

$$\sqrt[5]{2ى} - 1$$

$$\sqrt[5]{2ى} - \sqrt[10]{2ى}$$

$$\sqrt[10]{2ى} - 1$$

$$\sqrt[10]{2ى} - 1$$

٠٠ ٠٠

الفصل السادس

في ترقية الكميات الجذرية

(١٣٢) ترقى الكميات الجذرية البسيطة الى قوة مفروضة بضرب دلائل قواتها في دليل القوة المفروض او قسمة دليل الجذر الاصلي عليه مثلاً

مربع $\sqrt[3]{ب} = \sqrt[3]{ب^{2}}$ كما ان مربع $ب^{\frac{1}{3}} = ب^{\frac{2}{3}}$

مربع $-\sqrt[6]{5ك} = \sqrt[3]{5ك}$ كما ان مربع $(-5ك)^{\frac{1}{6}} = (5ك)^{\frac{1}{3}}$

مكعب $2\sqrt[5]{2ب} = 8\sqrt[5]{8ب^{3}}$ ومكعب $ب\sqrt[4]{(ب-س)} = ب^{3}\sqrt[4]{(ب-س)^{3}}$

القوة النونية من $\sqrt[ن]{ب+س} = ب + س$

مربع $\sqrt{ك} = ك$ ومكعب $\sqrt[3]{د} = د$

نتيجة : كل كمية جذرية تترقى الى قوة من اسم الجذر تصير منطقة فترفع عنها علامة الجذر

$(\sqrt{ب})^2 = ب \qquad (\sqrt{س - د})^2 = س - د$

اما الكميات الجذرية المركبة فترقى بالضرب او البسط نظير باقي الكميات

$(ك + \sqrt{د})^2 = ك^2 + 2ك\sqrt{د} + د$

$(\sqrt{م} - \sqrt{ن})^2 = م - 2\sqrt{م ن} + ن$

$(ت - \sqrt{ب})^3 = ت^3 - 3ت^2\sqrt{ب} + 3ت ب - ب\sqrt{ب}$

نظير $(ت - ب^{\frac{1}{2}})^3 = ت^3 - 3ت^2 ب^{\frac{1}{2}} + 3ت ب - ب^{\frac{3}{2}}$

$(3م - \sqrt{س})^4 = (3م - س^{\frac{1}{2}})^4$ رق اولاً

$(ب - د)^4 = ب^4 - 4ب^3د + 6ب^2د^2 - 4ب د^3 + د^4$

ثم عوض بـ $3م$ عن ب و $\sqrt{س}$ عن د

$81م^4 - 108م^3\sqrt{س} + 54م^2س - 12م س\sqrt{س} + س^2$

الفصل السابع

في تجذير الكميات الجذرية

(١٣٣) تجذر الكميات الجذرية بقسمة دلائل قواتها على دليل الجذر المطلوب او ضرب دليل الجذر الاصلي فيه مثلاً الجذر الكعبي من $\sqrt{ت} = \sqrt[6]{ت}$ ومن $\sqrt{ب^4} = ت^2$ المالي من $\sqrt{2} = \sqrt[8]{2}$ الكعبي من $\sqrt{27} = \sqrt{3}$ النوني من $\sqrt{2ت + س} = \sqrt[ن]{2} \times \sqrt[2ن]{ت + س}$ ومن $\sqrt{(ت - د)^ن} = \sqrt{ت - د}$

اما الكميات الجذرية المركبة فتجذر كسائر الكميات بموجب قواعد التجذير السابقة مثلاً $\sqrt{د - 2\sqrt{دم} + م} = \sqrt{د} - \sqrt{م}$

$\sqrt{4ت + 4\sqrt{ت}س + س} = 2\sqrt{ت} + \sqrt{س}$

$\sqrt[4]{ب - \sqrt{ن}} = (\sqrt{ب} - \sqrt{ن})^{\frac{1}{2}}$ وتجذر مثل $(ب^{\frac{1}{2}} - ن^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$

اولاً $(د - ه)^{\frac{1}{2}} = د^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} د^{-\frac{1}{2}} ه - \frac{1}{8} د^{-\frac{3}{2}} ه^{2}$ الخ ثم بالتعويض

$$(\sqrt{ب} - \sqrt{ن})^{\frac{1}{2}} = \begin{cases} ب^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{2} ب^{-\frac{1}{4}} ن^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{8} ب^{-\frac{3}{4}} ن \text{ الخ} \\ \sqrt[4]{ب} - \frac{1}{2} \sqrt[4]{ب}^{-1} \sqrt{ن} - \frac{1}{8} \sqrt[4]{ب}^{-3} ن \text{ الخ} \end{cases}$$

الجذر الرابع من

$١٦ب^{٤} - ٣٢ب^{٣}\sqrt{م} + ٢٤ب^{٢}م - ٨ب م\sqrt{م} + م^{٢}$ $(٢ب - \sqrt{م}$

$١٦ب^{٤}$

$٣٢ب^{٣} = (٢ب)^{٣} \times ٤$ $\quad) \quad - ٣٢ب^{٣}\sqrt{م}$

$١٦ب^{٤} - ٣٢ب^{٣}\sqrt{م} + ٢٤ب^{٢}م - ٨ب م\sqrt{م} + م^{٢}$

.. ..

(١٣٤) في تجذير كمية ثنائية صماء نظير $٧ - \sqrt{١٣}$ لنا ايضاً قاعدة اخرى مبنية على ان مربع كمية ثنائية عبارة عن ثلاثة حدود فالحد المنطق عبارة عن مجتمع جزئين ونصف الاخر عبارة عن حاصل جذريهما وهي: فرّق الحد المنطق الى جزئين حاصلهما مربع نصف الحد الاوسط

مثلاً $١١ + ٢\sqrt{٣٠} = ٦ + ٥ + ٢\sqrt{٦ \times ٥}$

وبالتجذير $\sqrt{١١ + ٢\sqrt{٣٠}} = \sqrt{٦} + \sqrt{٥}$

كذا جذّر $٧ + ٤\sqrt{٣}$ فرق ٧ الى جزئين مربعي ٢ و $\sqrt{٣}$

$٤ + ٢ \times ٢\sqrt{٣} + ٣$ فالجذر المالي منها $٢ + \sqrt{٣}$

كذا جذّر $٧ - ٢\sqrt{١٠}$ فرق ٧ الى جزئين مربعي $\sqrt{٥}$ و $\sqrt{٢}$

$٥ - ٢ \times \sqrt{٥}\sqrt{٢} + ٢$ فالجذر المالي منها $\sqrt{٥} - \sqrt{٢}$

خذ $\sqrt{٢٢ + ٨\sqrt{٦}}$ نصف الحد الاوسط $٤\sqrt{٦}$ ومربعه ٩٦

$\sqrt{١٦ + ٢\sqrt{١٦ \times ٦} + ٦} = ٤ + \sqrt{٦}$

كذا جذر $\text{ه} + \sqrt{\text{ب}}$ فرق ه الى جزئين

وليكن $\text{ه} = \frac{1}{2}(\text{ه} + \sqrt{\text{ك}}) + \frac{1}{2}(\text{ه} - \sqrt{\text{ك}})$

$$\text{ه} + \sqrt{\text{ب}} = \frac{1}{2}(\text{ه} + \sqrt{\text{ك}}) + \sqrt{\text{ب}} + \frac{1}{2}(\text{ه} - \sqrt{\text{ك}})$$

ولكي يصح ان تكون مربع كمية ثنائية يجب ان يعدل الاوسط مضاعف جذري الطرفين اي $\sqrt{\text{ب}} = 2\sqrt{\frac{1}{2}(\text{ه} + \sqrt{\text{ك}}) \times \frac{1}{2}(\text{ه} - \sqrt{\text{ك}})} = \sqrt{\text{ه}^2 - \text{ك}}$

بتربيع الطرفين $\text{ب} = \text{ه}^2 - \text{ك}$ اي $\text{ك} = \text{ه}^2 - \text{ب}$ فبالتعويض

$$\text{ه} + \sqrt{\text{ب}} = \frac{1}{2}(\text{ه} + \sqrt{\text{ه}^2 - \text{ب}}) + \sqrt{\text{ب}} + \frac{1}{2}(\text{ه} - \sqrt{\text{ه}^2 - \text{ب}})$$

بالتجذير $\sqrt{\text{ه} + \sqrt{\text{ب}}} = \sqrt{\frac{\text{ه} + \sqrt{\text{ه}^2 - \text{ب}}}{2}} + \sqrt{\frac{\text{ه} - \sqrt{\text{ه}^2 - \text{ب}}}{2}}$

فقس عليه $\sqrt{18 + 8\sqrt{2}}$ $\text{ه} = 18$ $\text{ب} = 8 \times 8 \times 2$

جذرها $\left(\frac{18 + \sqrt{324 - 128}}{2}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{18 - \sqrt{324 - 128}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$

اي $16 + \sqrt{2}$ كما يتضح من تفريق ١٨ الى ١٦+٢ كما سبق

الفصل الثامن

في تحويل الكميات الصماء الى منطقة

كثيرًا ما يقضي العمل بالكميات الجذرية الكسرية الى صعوبة تخلص منها بتحويل مخارجها غالبًا او صورها الى كميات منطقة كما يأتي

(١٣٥) تحويل حد اصم الى منطق . — يحول الحد الاصم الى منطق بضربه في حد اخر اصم يماثله في المقدار ودليل الجذر انما دليل قوته يساوي فضلة دليل القوة ودليل الجذر من الحد المفروض

$$\sqrt[ن]{ك} \times \sqrt[ن]{ك^{ن-1}} = ك \qquad \sqrt[ن]{س^{2}} \times \sqrt[ن]{س^{ن-2}} = س$$

$$\sqrt[5]{ب^{2}} \times \sqrt[5]{ب^{3}} = ب \qquad \sqrt[3]{ك} \times \sqrt[3]{ك^{2}} = ك$$

$$\sqrt[4]{ب^{3}(د-س)^{2}} \times \sqrt[4]{ب(د-س)^{2}} = ب(د-س)$$

(١٣٦) تحويل عبارة ثنائية ليس فيها الا الجذر المالي الى منطقة . — في الكميات الجذرية ايضاً حاصل مجتمع حدين في فضلتهما يساوي فضلة مربعيهما ومربع الجذر المالي منطق فلنا هذه القاعدة

اضرب مجتمع الحدين في فضلتهما او بالعكس فتحصل عبارة منطقة

$$(ب + \sqrt{د})(ب - \sqrt{د}) = ب^{2} - د$$

$$(\sqrt{ب-س} - \sqrt{س})(\sqrt{ب-س} + \sqrt{س}) = ب-س-س = ب-2س$$

$$(\sqrt{م} - \sqrt{م+ن})(\sqrt{م} + \sqrt{م+ن}) = م-(م+ن) = -ن$$

$$(\sqrt{5} + \sqrt{د-2})(\sqrt{5} - \sqrt{د-2}) = 5-(د-2) = 7-د$$

(١٣٧) تحويل عبارة من ثلاثة حدود ليس فيها الا الجذر المالي الى منطقة . — لنا في ذلك ذات القاعدة : اعتبر حدين منها حدًا واحدًا او اضربها في اخرى تشابهها تماماً بعد ابدال اشارتي حدين منها فيبقى حد اصم يحول بعد ذلك

$$(ب + \sqrt{م} - \sqrt{ن})(ب - \sqrt{م} - \sqrt{ن}) = ب^{2} - م - ن + 2\sqrt{نم} \quad ثم$$

$$(ب^{2}-م-ن+2\sqrt{نم})(ب^{2}-م-ن-2\sqrt{نم}) = (ب^{2}-م-ن)^{2} - 4نم$$

كذا $(\sqrt{7} - \sqrt{2} - \sqrt{5})(\sqrt{7} + \sqrt{2} + \sqrt{5}) = -2\sqrt{10}$ ثم

$$-2\sqrt{10} \times \sqrt{10} = -20$$

(١٣٨) في جذرين متشابهين من كميتين منطقتين او بهما مالي اصم وتنطبق سلسلة منظمة من قواتهما ومتجانسة من دليل الجذر الا واحد :

اذا كانت حدود السلسلة ايجابية تنطق بضربها في فضلة جذري الكميتين واذا كانت ايجابية فسلبية على التواتر تنطق بضربها في مجتمعهما مثلاً

$$(\sqrt[5]{ب^4}+\sqrt[5]{ب^3 د}+\sqrt[5]{ب^2 د^2}+\sqrt[5]{ب د^3}+\sqrt[5]{د^4})\times(\sqrt[5]{ب}-\sqrt[5]{د})=ب-د$$

وذلك لان السلسلة من قوات $\sqrt[5]{ب}$ و $\sqrt[5]{د}$ ومن الدرجة ٤ اي ٥ – ١

$$(\sqrt[4]{ب^3}+\sqrt[4]{ب^2 د}+\sqrt[4]{ب د^2}+\sqrt[4]{د^3})\times(\sqrt[4]{ب}-\sqrt[4]{د})=ب-د$$

$$(\sqrt[5]{د^4}-\sqrt[5]{د^3 ب}+\sqrt[5]{د^2 ب^2}-\sqrt[5]{د ب^3}+\sqrt[5]{ب^4})\times(\sqrt[5]{د}+\sqrt[5]{ب})=د+ب$$

$$(\sqrt[4]{د^3}-\sqrt[4]{د^2 ب}+\sqrt[4]{د ب^2}-\sqrt[4]{ب^3})\times(\sqrt[4]{د}+\sqrt[4]{ب})=د-ب$$

ومثال ما كانت فيه احدى الكميتين جذراً مالياً

$$(\sqrt[8]{٨ی^3}+\sqrt[8]{٤ی^2 ب^2}+\sqrt[8]{٢ی ب^4}+\sqrt[8]{ب^6})\times(\sqrt[8]{٢ی}-\sqrt[8]{ب^2})$$

$=\sqrt[2]{٢ی}-ب$ ثم $(\sqrt[2]{٢ی}-ب)(\sqrt[2]{٢ی}+ب)=٢ی-ب^2$

$$(\sqrt[5]{٤ی^2}-\sqrt[10]{٨ی^3}+\sqrt[5]{٢ی}-\sqrt[10]{٢ی}+١)\ (\sqrt[10]{٢ی}+١)$$

$=\sqrt[2]{٢ی}+١$ ومثال ما كانت فيه كلتا الكميتين جذراً مالياً

$$(\sqrt[8]{ب^3}-\sqrt[8]{ب^2 ی}+\sqrt[8]{ب ی^2}-\sqrt[8]{ی^3})(\sqrt[8]{ب}-\sqrt[8]{ی})=\sqrt[2]{ب}+\sqrt[2]{ی}$$

وذلك نظير

$$(\sqrt[4]{(ب^3)^{\frac{1}{2}}}-\sqrt[4]{(ب^2 ی)^{\frac{1}{2}}}+\sqrt[4]{(ب ی^2)^{\frac{1}{2}}}-\sqrt[4]{(ی^3)^{\frac{1}{2}}})(\sqrt[4]{ب^{\frac{1}{2}}}-\sqrt[4]{ی^{\frac{1}{2}}})$$

نتيجة : يمكن تنطيق صورة كسر او مخرجه بضربهما معاً في ما يتحول به الحد المطلوب الى منطق فلا تختلف القيمة مثاله

$$\frac{\sqrt[5]{ك^2}}{٨}\times\frac{\sqrt[5]{ك^3}}{\sqrt[5]{ك^3}}=\frac{ك}{٨\sqrt[5]{ك^3}}\ ،\ \frac{\sqrt{ب}+\sqrt{س}}{\sqrt{ب}}\times\frac{\sqrt{ب}-\sqrt{س}}{\sqrt{ب}-\sqrt{س}}=\frac{ب-س}{ب-\sqrt{ب س}}$$

$$\frac{د}{\sqrt[7]{ك^5}}=\frac{د\sqrt[7]{ك^2}}{ك}\qquad \frac{٢}{\sqrt{٣}-\sqrt{٢}}\times\frac{\sqrt{٣}+\sqrt{٢}}{\sqrt{٣}+\sqrt{٢}}=٢(\sqrt{٣}+\sqrt{٢})$$

$$\frac{\sqrt[3]{\text{د}^2}+\sqrt[3]{\text{دب}}+\sqrt[3]{\text{ب}^2}}{\sqrt[3]{\text{ب}^2}}\times\frac{\sqrt[3]{\text{د}}-\sqrt[3]{\text{ب}}}{\sqrt[3]{\text{د}}-\sqrt[3]{\text{ب}}}=\frac{\text{د}-\text{ب}}{\sqrt[3]{\text{دب}^2}-\text{ب}}$$

الفصل التاسع

نظريات في الجذور الصماء

نظرية ١ : جذر منطق لا يمكن ان يتركب من جزءين احدهما منطق والآخر اصم . والا فلنفرض $\sqrt{\text{د}}=\text{ه}-\sqrt{\text{ى}}$ وبتربيع الجانبين $\text{د}=\text{ه}^2-2\,\text{ه}\sqrt{\text{ى}}+\text{ى}$ وبنقل الجذر الى جهة ثم القسمة على ٢ ه

$2\,\text{ه}\sqrt{\text{ى}}=\text{ه}^2+\text{ى}-\text{د}$ و $\sqrt{\text{ى}}=\dfrac{\text{ه}^2+\text{ى}-\text{د}}{2\,\text{ه}}$ وهي منطقة خلاف المفروض

نظرية ٢ : اذا كان على جانبي معادلة اجزاء منطقة وصماء تكون الاجزاء المنطقة على الجانبين متساوية والصماء كذلك مثلاً

في $\text{س}+\sqrt{\text{ع}}=\text{د}+\sqrt{\text{ب}}$ يكون $\text{س}=\text{د}$ و $\sqrt{\text{ع}}=\sqrt{\text{ب}}$ والاّ

ليكن $\text{س}=\text{د}\pm\text{م}$ فيكون من طرحهما $\sqrt{\text{ع}}=\sqrt{\text{ب}}\mp\text{م}$

وذلك لايمكن حسب (نظرية ١)

نظرية ٣ : اذا فرض $\sqrt{\text{ب}+\sqrt{\text{د}}}=\text{م}+\sqrt{\text{ن}}$ يكون $\sqrt{\text{ب}-\sqrt{\text{د}}}=\text{م}-\sqrt{\text{ن}}$

لانه بتربيع المفروض $\text{ب}+\sqrt{\text{د}}=\text{م}^2+\text{ن}+2\,\text{م}\sqrt{\text{ن}}$ وحسب (نظرية ٢)

(١) $\text{ب}=\text{م}^2+\text{ن}$ (٢) $\sqrt{\text{د}}=2\,\text{م}\sqrt{\text{ن}}$

بالطرح $\text{ب}-\sqrt{\text{د}}=\text{م}^2+\text{ن}-2\,\text{م}\sqrt{\text{ن}}$ وبالتجذير

$$\sqrt{\text{ب}-\sqrt{\text{د}}}=\text{م}-\sqrt{\text{ن}}$$

نتيجة $\sqrt{\text{ب}+\sqrt{\text{د}}}=\tfrac{1}{2}(\text{ب}+\tfrac{1}{2}\sqrt{\text{ب}^2-\text{د}})^{\frac{1}{2}}+\tfrac{1}{2}(\text{ب}-\sqrt{\text{ب}^2-\text{د}})^{\frac{1}{2}}$

اذاً $\sqrt{\text{ب}-\sqrt{\text{د}}}=\tfrac{1}{2}(\text{ب}+\tfrac{1}{2}\sqrt{\text{ب}^2-\text{د}})^{\frac{1}{2}}-\tfrac{1}{2}(\text{ب}-\sqrt{\text{ب}^2-\text{د}})^{\frac{1}{2}}$

الفصل العاشر

الكميات الوهمية

(١٣٩) كل كمية وهمية تحل الى ضلعين احدهما $\sqrt{-1}$ مثلاً $\sqrt[2]{-دب} = \sqrt[2]{دب} \times \sqrt[2]{-1}$ و $(\sqrt[2]{-(ب+س)})^2 = (\sqrt{ب+س} \times \sqrt{-1})^2$

وهذه الكمية اي $\sqrt{-1}$ هي القوة الاولى من ذاتها ومربعها -1 والقوة الثالثة منها $-\sqrt{-1}$ والقوة الرابعة منها ١ فبما ان حاصل ترقية $\sqrt{-1}$ الى القوة الرابعة هو ١ تعرف اية قوة فرضت منها باسقاط امثال الاربعة من تلك القوة وعليه ليفرض ن عدداً مثبتاً غير معين فيكون

$$(\sqrt{-1})^{٤ن+١} = \sqrt{-1} \qquad (\sqrt{-1})^{٤ن+٢} = -1$$

$$(\sqrt{-1})^{٤ن+٣} = -\sqrt{-1} \qquad (\sqrt{-1})^{٤ن} = 1$$

فلو طلبت القوة ٣٥ من $\sqrt{-1}$ لاسقطنا ٤ × ٨ واخذنا القوة الثالثة منها ولو طلبت القوة ٥٠ لاسقطنا ٤ × ١٢ واخذنا القوة الثانية فقس عليه

(١٤٠) لو طلب تربيع $\sqrt{-د}$ اي ضربها في نفسها لكان الحاصل $-د$ برفع علامة الجذر وليس د ولو ضربنا $\sqrt{-ب} \times \sqrt{-د}$ لكان الحاصل $-\sqrt{دب}$ وليس $\sqrt{دب}$ وليؤمن الغلط في مثل هذه الاعمال يجب مراعاة القاعدة الاتية : حل الكميات الوهمية الى ضلعين احدهما -1 قبل ضربها او قسمتها او ترقيتها مثلاً $\sqrt{-ب} \times \sqrt{-د} =$

$$\sqrt{ب} \times \sqrt{-1} \times \sqrt{د} \times \sqrt{-1} = \sqrt{دب} \times -1 = -\sqrt{دب}$$

اخر $(د + \sqrt{-ب^2})^2 = (د + ب\sqrt{-1})^2 = د^2 + ٢دب\sqrt{-1} - ب^2$

(١٤١) قد ترد $\sqrt{-1}$ بالترقية الى كمية حقيقية كما رأيت في القوة الثانية

والرابعة وما يماثلها وتؤخذ منها احياناً بالتجذير كمية حقيقية مثلاً لو طلب الجذر الرابع من −١ او المالي من $\sqrt{-1}$ اي $\sqrt{\sqrt{-1}}$

حل −١ الى ثلاثة اضلاع ٤ × ½ × −½ فيكون

$\sqrt[4]{-1} = \sqrt{2\sqrt{\frac{1}{2} \times -\frac{1}{2}}}$ ثم بجمع $\frac{1}{2} + \frac{-1}{2}$ اي صفر تصير

$$\sqrt[4]{-1} = \sqrt{\frac{1}{2} + 2\sqrt{\frac{1}{2} \times -\frac{1}{2}} + \frac{-1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$$

تمرين على الباب كله

حول ما يأتي الى دليل جذر مشترك

(١) $\text{ك}^{\frac{1}{2}}\,\text{ى}^{\frac{1}{n}}$ (٢) $(\text{د}+\text{ب})^{2}$ ، $(\text{س}-\text{ى})^{\frac{2}{3}}$ (٣) $\sqrt[3]{\text{ك}^{2}}$ $\sqrt{\text{ه}}$ $\sqrt[4]{\text{ب}}$

(٤) $\sqrt[3]{4}$ $\sqrt[4]{5}$ (٥) $\text{د}^{\frac{1}{2}}$ ، ب ، $\text{ك}^{\frac{2}{3}}$ (٦) $\text{ب}^{\frac{1}{2}}$ ٣ ى

اخرج بعض ما يأتي من تحت علامة الجذر

(٧) $\sqrt{150}$ ، $\sqrt{1805}$ ، $\sqrt[3]{320}$ ، $\sqrt[4]{768}$

(١١) $\sqrt[5]{608}$ (١٢) $\sqrt{\text{ب}^{4}\text{د}^{2}\text{ه}}$ (١٣) $\sqrt{\text{س}\,\text{ع}^{2}-\text{ع}^{3}}$

(١٤) $\sqrt{(\text{س}^{2}-\text{ع}^{2})(\text{س}+\text{ع})}$ (١٥) $\sqrt{4\text{ب}^{3}-8\text{ب}^{2}+4\text{ب}}$

اختصر (١٦) $2\text{ب}\sqrt{\text{د}}+3\text{ب}\sqrt{\text{د}}+\text{ب}\sqrt{\text{د}}$

(١٧) $5\sqrt[3]{\text{م}}+3\sqrt[3]{\text{م}}-7\sqrt[3]{\text{م}}$ (١٨) $\sqrt{24}+\sqrt{96}-\sqrt{54}$

(١٩) $10\sqrt{72}-5\sqrt{32}+3\sqrt{50}$

(٢٠) $\sqrt{16\text{ب}^{3}\text{د}^{2}}+\text{د}\sqrt{25\text{ب}}+\sqrt{9\text{ب}(\text{س}-\text{د})^{2}}$

(٢١) $\sqrt{\frac{64\,\text{د}\,\text{ه}^{5}}{2\text{ب}}}-\sqrt{\frac{\text{د}^{2}\text{ه}}{2\text{ب}}}$ (٢٢) $\sqrt{18\text{ب}^{5}\text{د}^{7}}+\sqrt{162\text{ب}\text{د}^{5}}$

(٢٣) $\sqrt{\text{٢س}^{٢}-\text{٤سب}+\text{٢ب}^{٢}}-\sqrt{\text{٨ب}^{٢}}$

(٢٤) $\sqrt{(\text{د}+\text{ب})(\text{د}^{٢}-\text{ب}^{٢})}-\sqrt{\text{د}^{٣}-\text{د}^{٢}\text{ب}}$

(٢٥) $\sqrt{\frac{\text{٥ب}^{٢}-\text{١٠بد}+\text{٥د}^{٢}}{\text{٨س}^{٢}}}+\sqrt{\frac{\text{١٢٥ب}^{٢}}{\text{١٨س}}}$

(٢٦) اضرب $\sqrt{\text{٢}}\times\sqrt{\text{٣}}\times\sqrt{\text{ب}}\times\sqrt{\text{٣٥}}$

(٢٧) $\sqrt[٣]{\text{ب}}\times\sqrt[٣]{\text{د}^{٢}}\times\sqrt[٣]{\text{٥ب}}\times\sqrt[٣]{\text{٢٥بد}}$

(٢٨) $\sqrt{\text{ب}}\sqrt{\text{ب}-\text{ك}}\sqrt{\text{بد}}$

(٢٩) $\sqrt[٣]{\text{ب}}\sqrt[٣]{\text{ب}+\sqrt{\text{٣}}}$ و $\sqrt[٥]{\text{ب}-\sqrt{\text{٣}}}\times\sqrt[٥]{\text{د}}$

(٣٠) $\sqrt[٤]{\text{د}}\times\sqrt[٤]{\text{د}+\sqrt[٣]{\text{ب}^{٢}}}\times\sqrt[٤]{\text{د}-\sqrt[٣]{\text{ب}}}$

(٣١) $\sqrt[٣]{\text{ب}}\sqrt{\text{بس}}$ (٣٢) $\sqrt[٤]{\text{د}^{٢}}\times\sqrt{\text{د}}\times\sqrt[٣]{\text{د}^{٢}\text{س}}$

(٣٣) $\sqrt[٣]{\text{ب}+\text{س}}\times\sqrt{\text{ب}^{٢}\text{د}}\times\sqrt[٣]{(\text{س}-\text{م})^{٢}}$

(٣٤) $\sqrt[٣]{\text{د}+\sqrt{\text{ب}}}\times\sqrt[٣]{\text{د}-\sqrt{\text{ب}}}\times\sqrt[٤]{\text{سف}}$

(٣٥) $\sqrt{\text{ك}+\sqrt{\text{ك}^{٢}-(\text{ب}+\text{ن})}}\times\sqrt{\text{ك}-\sqrt{\text{ك}^{٢}-(\text{ب}+\text{ن})}}$

(٣٦) $\left(\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}}-\text{١}-\frac{\text{١}}{\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}}}\right)\left(\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}}+\text{١}+\frac{\text{١}}{\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}}}\right)$

(٣٧) $\sqrt[٣]{(\text{ب}-\text{س})^{٢}}\sqrt{\text{ب}-\text{س}}\times\sqrt[٦]{(\text{ب}-\text{س})^{٥}}$

(٣٨) اقسم $\sqrt{\text{٨}}\div\sqrt{\text{٢}}$ (٣٩) $\sqrt{\text{٤ب}^{٢}}\div\sqrt{\text{ب}}$

(٤٠) $\sqrt[٣]{\text{بس}^{٢}}\div\sqrt[٣]{\text{بس}^{-١}}$ (٤١) $\sqrt[٤]{\text{س}^{٢}-\text{١}}\div\sqrt[٤]{\text{س}+\text{١}}$

(٤٢) $\sqrt[\text{ن}]{\frac{\text{ب}^{\text{٢ن}}(\text{س}-\text{ف})^{٢}}{\text{٨د}}}\div\sqrt[\text{ن}]{\frac{\text{ب}^{٢}(\text{س}-\text{ف})}{\text{٨د}^{\text{ن}-\text{١}}}}$

(٤٣) $د \div (ب + \sqrt{ب^{٢} - د})$

(٤٤) $\sqrt[٣]{د ب^{٢}} + ب \sqrt[٣]{د^{٢}} + \sqrt[٣]{د ب}$

(٤٥) $(ب - د) \div (\sqrt[٤]{ب} - \sqrt[٤]{د})$

(٤٦) $س^{٢} - ٢ \sqrt[٣]{س د^{٢}} - س \sqrt[٦]{س^{٢} د^{٢}} + ٢ د \sqrt[١٢]{د}$ على $\sqrt{ب} - \sqrt[٣]{د}$

(٤٧) $ب \sqrt{\frac{م ن + م ف}{ن}} + م \sqrt{\frac{ب د - ب ف}{ن}}$

(٤٨) $\sqrt[٣]{ب س^{٢}} + \sqrt[٤]{ب^{٢} س}$ (٤٩) $\sqrt[٤]{ب^{٢} د^{٢}} + \sqrt[٣]{ب د}$

(٥٠) $\sqrt[٦]{٦٤} + \sqrt[٣]{٢}$ (٥١) $\sqrt[٥]{م (د - ه)^{٢}} + \sqrt{م (د - ه)^{٢}}$

(٥٢) ربع $\sqrt{ب}$ $\sqrt[٣]{ب^{٢}}$ $\sqrt[٦]{٢ (ب + س)^{٢}}$ $\sqrt[٤]{٢ د^{٢} س}$

(٥٦) كعب $\sqrt[٣]{ب}$ $\sqrt[٦]{ب^{ن} س}$ $\sqrt[٤]{(ب - س)^{٢}}$ $\sqrt[٥]{(ب - س)^{\frac{ن}{٢}}}$

رق الى القوة

(٦١) الرابعة $\sqrt[٤]{ب}$ $\sqrt[٦]{ب^{٢} م}$ $\sqrt[٨]{(ب - س)^{٢}}$ $\sqrt[٥٤]{٢ ب^{٢} (ب + د)^{٢}}$

(٦٤) النونية $\sqrt[ن٥]{ب}$ $\sqrt[٣]{ب (ب - د)^{٢}}$ $\sqrt[ن٥٢]{س^{٢} (س - ١)}$ $\sqrt[٦]{ب^{\frac{١}{ن}} (ب + د)^{\frac{١}{ن}}}$

(٦٨) ربع $ف + \sqrt{٢ م}$ (٦٩) $\sqrt[٤]{د} - \sqrt{ه}$

(٧٠) كعب $\sqrt{٢ ب - ن}$ (٧١) $\sqrt[٦]{م^{٢}} - ه^{٢}$

(٧٢) ربع $٣ - ٢ \sqrt{٢}$ (٧٣) $\sqrt[٣]{ب + \sqrt{ب^{٢} - د}}$

(٧٤) خذ الجذر المالي من $\sqrt[٣]{ب^{٢} س^{٢}}$، $\sqrt[٤]{ب^{٢} س^{٥}}$

(٧٦) " المالي من $\sqrt[٥]{ب - ٢ \sqrt{ب} + ١}$

(٧٧) " " $\sqrt{ك^{٢} \times ٢ ك \sqrt{د} \times د}$

(٧٨) الكعبي من $\sqrt[٦]{ب^{٢} د^{٢}}$ من $٥ \sqrt{ب^{٢} د^{٢٠}}$

(٨٠) " " $\sqrt[٦]{(س - ن)^{٢} \times \sqrt{ب - د}}$

(٨١) $\sqrt[\cdot]{\text{ب}^{٣} - ٣\,\text{ب}\sqrt[٣]{\text{س}} + ٣\,\text{ب}\,\text{س} - \sqrt[٣]{\text{س}^{٢}}}$

(٨٢) الرابع من $٨١\,\text{م}^{٤} - ١٠٨\,\text{م}^{٣}\sqrt[٣]{\text{س}} + ٥٤\,\text{م}^{٢}\,\text{س} - ١٢\,\text{م}\sqrt{\text{س}^{٣}} + \text{س}^{٢}$

(٨٣) النوني من $\sqrt{\text{ب}} - \sqrt{\text{ن}}$ ، $\sqrt[٢]{(\text{س} - \text{ب})^{٢ن}}$ ، $\sqrt[٢]{\text{س}\,(٢\text{د} - \text{هـ})^{٢}}$

(٨٦) المالي من $\text{ب} + \sqrt{\text{س} - \text{د}}$ ، $(\text{ف} - \text{هـ}) - \sqrt{\text{د}}$

(٨٨) $١٤ - ٦\sqrt{٥}$ ، $٢٧ + ١٠\sqrt{٢}$

حول الى مخارج منطقة

(٩٠) $\frac{٥}{\sqrt[٣]{\text{ك}}}$ ، $\frac{٢\text{ب}}{\sqrt[٥]{(\text{ب} - \text{س})^{ن}}}$ ، $\frac{\text{د}}{\sqrt{\text{ب}} - \sqrt{\text{ب}}}$ ، $\frac{٦\,\text{ك}}{٢\,\text{م} + \sqrt{\text{هـ}}}$

(٩٤) $\frac{٢\,\text{ك}\,\text{ن}}{\text{ب} - \sqrt{\text{د}}}$ ، $\frac{٦\sqrt[٥]{\text{ك}^{٢}}}{\sqrt{\sqrt{\text{ب}} - \sqrt{\text{د}}}}$

(٩٦) $\frac{\sqrt[٣]{\text{م}}}{\sqrt[٣]{\text{م}^{٢}} + \sqrt[٣]{\text{م}\,\text{هـ}} + \sqrt[٣]{\text{هـ}^{٢}}}$ ، $\frac{٤\sqrt[٤]{\text{م}}}{\sqrt[٤]{\text{م}^{٣}} - ٢\sqrt[٤]{\text{م}^{٢}\text{هـ}^{٢}} + \sqrt[٤]{٤\,\text{م}\,\text{هـ}^{٤}} - \sqrt[٤]{٨\,\text{هـ}^{٦}}}$

(٩٨) $\frac{٢\sqrt[٥]{\text{ب}}}{\sqrt[٥]{\text{ب}^{٤}} - \sqrt[٥]{٢\,\text{ب}^{٣}\text{هـ}} + \sqrt[٥]{٤\,\text{ب}^{٢}\text{هـ}^{٢}} - \sqrt[٥]{٨\,\text{ب}\,\text{هـ}^{٣}} + \sqrt[٥]{١٦\,\text{هـ}^{٤}}}$

حوّل الى صور منطقة

(٩٩) $\frac{٣\sqrt{٥} - ٢}{٢ - \text{م}}$ ، $\frac{٦\sqrt[٣]{\text{ك}^{٢}} - \sqrt{\text{ب}}}{٦\sqrt{\text{ب}}}$ ، $\frac{\text{ب} - \sqrt{\text{ب}^{٢} - \text{س}^{٢}}}{\text{س}^{٢}}$

(١٠٢) $\frac{\sqrt[٣]{٤\,\text{هـ}^{٤}} - \sqrt[٣]{٢\,\text{هـ}^{٢}\text{ب}^{٢}} + \sqrt[٣]{\text{ب}^{٤}}}{\sqrt[٣]{\text{ب}^{٢}}}$

(١٠٣) $\frac{\sqrt{٣} + \sqrt{٥} - \sqrt{٥} - \sqrt{٥}}{\sqrt{٣} + \sqrt{٥} + \sqrt{٥} - \sqrt{٥}}$

الباب الثامن *

في المعادلات والمسائل ذات المجهول الواحد من الدرجة الاولى

تعريفات اولية

(١٤٢) المساواة هي افادة جبرية تدل على التساوي بين كميتين فاكثر مثالها ٥+ك — ٣ك = ٥ — ٢ ك   ن — ٤ = ١٧

و يقال لما سبق اشارة المساواة الجانب الايمن او الطرف الاول ولما تلاها الجانب الايسر او الطرف الثاني ولهما معاً الجانبان او الطرفان

(١٤٣) المساواة اما ذاتية او عينية واما معادلة فالذاتية هي ما تم فيها تساوي الطرفين مهما فرضت قيمة حروفها

مثلاً (س+ب) (س ـ ب) = س^{٢} ـ ب^{٢}

افرض: س = ٤   ب = ٢   وعوض عنهما فينتج

(٤+٢) (٤ — ٢) = ٤^{٢}— ٢^{٢} اي ١٢ = ١٢

افرض: س = ٨   ب = ٣

(٨ + ٣) (٨ — ٣)= ٨^{٢}— ٣^{٢} اي ٥٥ = ٥٥

وهكذا يتم تساوي الطرفين مهما فرضت قيمة س او ب

والمعادلة هي مساواة لا يصح فيها تساوي الطرفين الا بتعيين قيمة خصوصية او اكثر لاحد حروفها او بعضها والحروف التي تتعين المساواة بتعيين قيم خصوصية لها هي مجاهيل المعادلة

مثلاً ٣ك+٦ = ١٨ هي معادلة ذات مجهول واحد لان المساواة لا تصح الا متى فرضت ك = ٤ فتصير بالتعويض عن ك بقيمتها

---

* ويمكن من شاء من الاساتذة تدريس هذا الباب وما بعده قبل الباب الرابع وما يليه وقدمت تتمة للعمليات التي تطرأ على الكميات

٣ × ٤ + ٦ = ١٨

كذا ى٢ + ٣٢ = ١٢ ى هي معادلة ذات مجهول لان المساواة لانصح الا متى فرضت ى = ٨ او ى = ٤

فيكون بالفرض الاول ٦٤ + ٣٢ = ١٢ × ٨ اي ٩٦ = ٩٦

وبالفرض الثاني ١٦ + ٣٢ = ١٢ × ٤ اي ٤٨ = ٤٨

جواب المعادلة او جذرها : قيمة المجهول الصالحة لتعيين المساواة مثلاً

المعادلة ٣ك + ٦ = ١٨ لها جواب واحد او جذر واحد ٤

والمعادلة ى٢ + ٣٢ = ١٢ ى لها جوابان او جذران هما ٨ و ٤

(١٤٤) المعادلة اما عددية وهي ما لا احرف بها ينوب عن المعلوم كالمعادلتين السابقتين واما حرفية وهي ما كان بها غير المجهول حرف او اكثر ينوب عن المعلوم . نظير د و ب فيما يأتي

مثالها ى٢ — م د ى = ب ٣ م — د = ١٥

(١٤٥) درجة المعادلة : هي مجموع دلائل المجاهيل الاعظم في حد واحد واعتبار ذلك يكون بعد اصلاح المعادلة وردها الى هيئة خالصة من الكسور والكميات الصماء . مثلاً

المعادلة ك — م = ٧ من الدرجة الاولى ذات مجهولين ك و م

والمعادلة ٤ ك٢ — ٧ك = ١٥ من الدرجة الثانية ذات مجهول واحد باعتبار دليل ك في الحد الاول

والمعادلة ن٢ — ل٢ = ٦٣ من الدرجة الثالثة ذات مجهولين ن و ل باعتبار دليل ن

(١٤٦) المعادلات اما متوافقة او متشابهة وهي ما كان لها ذات الاجوبة اي ما كانت قيم المجاهيل في الاولى تصلح للثانية وبالعكس واما متناقضة او غير متشابهة وهي خلاف الاولى مثال المتشابهة

ك — ٥ = ١٢ و ٢ ك — ٦ = ٢٨

فقيمة ك في المعادلتين ١٧ وهي صالحة لتعيين المساواة فيهما لانه بالتعويض فيهما عن ك ١٧ — ٥ = ١٢ ٣٤ — ٦ = ٢٨

مثال الغير المتشابهة ٢ك — ٥ = ٣١ و ك — ٤ = ١٢

فان قيمة ك في الاولى ١٨ لا تصلح للثانية وقيمة ك في الثانية ١٦ لا تصلح للاولى

الفصل الاول

في اصول حل المعادلات

(١٤٧) قاعدة ١ — في معادلات متشابهة اذا تساوى طرفا معادلتين يكون الطرفان الاخران متساويين (اولية ١)

مثلاً ك٢ + ٣ ل = ١٠ } قيمة ك = ٢ او — ٢ فيهما
٤ ك٢ — ٣ ل = ١٠ } ول = ٢ فيهما ايضاً

اذاً ك٢ + ٣ل = ٤ك٢ — ٣ ل

تنبيه : قلنا في معادلات متشابهة احترازاً من المتناقضة اذ لا يصح ذلك فيها

مثلاً ك — ٥ = ١٠ } ك = ١٥ في الاولى
ك — ٣ = ١٠ } ك = ١٣ في الثانية

فلا يصح ان يكون ك — ٥ = ك — ٣ حيث لا تصح المساواة ٥ = ٣

(١٤٨) قاعدة ٢ : اذا اضيفت كمية الى طرفي معادلة او طرحت منهما لا تتغير المساواة مثلاً ٣ك — ٢ ب = ٤ ب + ٢ ك

اجمع الى الطرفين ٢ب واطرح منهما ٢ك

٣ ك — ٢ ك = ٤ ب + ٢ ب

نتيجة ١ : تنقل كمية من طرف الى اخر بتبديل اشارتها فلا تتغير المساواة فان ٢ك كانت ايجابية في الطرف الثاني فصارت سلبية في الاول

كذا ٢ ب كانت سلبية في الجانب الايمن فنقلت ايجابية الى الايسر

نتيجة ٢ : الكميات المتساوية في الجانبين ولها ذات الاشارة من جمع او طرح يمكن اسقاطها مثلاً

٢ ك — د = ١٥ — د

يمكن اسقاط — د من الطرفين لانه لو جمع د اليهما لصارت المعادلة

٢ ك = ١٥

نتيجة ٣: تتبدل اشارات كل حدود المعادلة من + الى — وبالعكس فلا تتغير المساواة مثلاً د — ب = ١٠ — م ى

انقل كل الحدود من طرف الى اخر — ١٠ + م ى = — د + ب

بعكس الترتيب ب — د = — ١٠ + م ى

(١٤٩) اذا ضرب طرفا معادلة في كمية واحدة (محدودة) او قسما عليها لا تتغير المساواة والمعادلة الثانية تشبه الاولى

مثلاً ى — ٢د = ٣ب او ى — ٢د — ٣ ب = ٠

تعين المساواة في هذه المعادلة بتعيين قيمة للمجهول ى تجعل الطرف الاول صفراً . اضرب الطرفين في س ولتكن محدودة اى غير صفر وغير متناهية س ى — ٢د س = ٣ب س او

س (ى — ٢د — ٣ب) = ٠ فهذه المعادلة تشبه الاولى اي ان ى لها ذات القيمة في المعادلتين والبرهان لو عينا للمجهول ى ذات القيمة في المعادلة الثانية لكانت الكمية (ى — الخ) تساوي صفراً وحاصلها في س صفر ايضاً فقيمة ى في الاولى تصلح للثانية . بالعكس بما ان حاصل س في كميات ى الخ صفر بالمعادلة الثانية فلا بد ان يكون احد المضروبين صفر وبما ان س غير صفر فمن الضرورة ان تكون كمية (ى — ٢د — ٣ب) = ٠ . وبالنتيجة قيمة ى فيها تصلح لتعيين المساواة في الاولى فالمعادلتان

متشابهتان وهكذا يبرهن انه لو قسم طرفا المعادلة على س تكون المعادلة

$$\frac{ى - ٢ د - ٣ ب}{س} = ٠ \text{ او } \frac{ى - ٢ د}{س} = \frac{٣ ب}{س}$$

مشابهة الاولى

ملاحظة : يلزم ان تكون الكمية محدودة اي ان لا تكون صفرًا ولا غير متناهية فيلزم من ذلك ان لا تحتوي على المجهول

مثلاً ٢ك = ٨ اضرب الطرفين في ك — ٣

٢ك (ك — ٣) = ٨ (ك — ٣)

فهذه لاتشبه الاولى تمامًا لان لها حلين ٤ و٣ اما الاول فيصلح للمعادلتين كما يتبين من التعويض فيهما

فان ٢ × ٤ = ٨ و ٢ × ٤ (٤ — ٣) = ٨ (٤ — ٣)

اما ٣ الحل الثاني فيصلح لقيمة ك في المعادلة الثانية فقط ولايصلح للاولى فان ٢ × ٣ (٣ — ٣) = ٨ (٣ — ٣) صحيحة و ٢ × ٣ = ٨ فاسدة

فيلاحظ من ذلك انه اذا ضرب طرفا معادلة في كمية تحوي على المجهول تدخل اجوبة جديدة في المعادلة الاخرى تصلح للكمية المضروب فيها وحدها فيلزم صرف النظر عنها بعد الحل وحفظ الاجوبة الاخرى التي تصلح للاصلية فقط فالحل ٣ يصلح للمضروب فيها ك — ٣ لذلك يلزم صرف النظر عنه وحفظ الحل الآخر ٤

نتيجة : يمكن ازالة المخارج من المعادلة بضرب كل الحدود في معدود المخارج الاصغر مثلاً $ك - \frac{١}{٢} = \frac{٢ك}{٣} - \frac{ك}{٥} + \frac{١}{٢}$

اضرب الحدود في ٣٠

٣٠ ك — ١٥ = ٢٠ ك — ٦ ك + ١٥ اي ١٦ ك = ٣٠

وذلك ما يسمى بالجبر اي تصحيح المعادلة وازالة الكسر منها

(١٥٠) بناءً على ما مر تلخص العمليات الاتية لحل المعادلات من الدرجة الاولى ١ً الجبر اي ازالة الكسور من المعادلة بضرب حدودها في معدود المخارج الاصغر ٢ً المقابلة اي نقل المعلوم الى جهة والمجهول الى اخرى بتبديل العلامات ٣ً قسمة الطرفين على مسمى المجهول لاستخراج قيمته

مثال ١ ‏ ٥ك/٨ + ١٤ = ٣ك/٤ + ١٣

بالجبر اي الضرب في ٨ ‏ ٥ ك + ١١٢ = ٦ ك + ١٠٤

بالمقابلة ‏ ك = ٨

مثال ٢ ‏ ٧ك/٣ + ١٠ = ك + ١٤

بالجبر ‏ ٧ ك + ٣٠ = ٣ ك + ٤٢

بالمقابلة والقسمة على ٤ ‏ ٤ ك = ١٢ ‏ ك = ٣

مثال ٣ ‏ (ك+٤)/٣ — (٤ك—٢٠)/٥ + ٣/٥ = ٤ ك — ٣

بالجبر ‏ ٥ ك + ٢٠ — ١٢ ك + ٦٠ + ٩ = ٦٠ ك — ٤٥

بالمقابلة ‏ ٢٠ + ٤٥ + ٦٠ + ٩ = ٦٠ ك + ١٢ ك — ٥ ك

بالاصلاح و بالقسمة على ٦٧ ‏ ١٣٤ = ٦٧ ك ‏ ٢ = ك

مثال ٤ ‏ ب ك/د + ط = س/د

بالجبر ‏ ب ك + ط د = س

بالمقابلة ‏ ب ك = س — ط د

بالقسمة على ب ‏ ك = (س — ط د)/ب

مثال ٥ ‏ ك/ب = ح — ك/د

بالجبر ‏ د ك = ب ح د — ب ك

بالمقابلة ‏ د ك + ب ك = ب ح د

بالاصلاح ‏ (د + ب) ك = ب ح د

بالقسمة على ب + د $\quad \text{ك} = \frac{\text{ب ح د}}{\text{ب} + \text{د}}$

(١٥١) قد لا يلزم جبر المخارج كلها فتجبر البسيطة منها وبعد المقابلة والاصلاح تجبر المخارج الاخرى

مثال ٦ $\quad \frac{7\text{ك} + 6}{14} + \frac{8\text{ك} - 4}{5\text{ك} + 3} = \frac{14\text{ك} + 17}{28} + \frac{2\frac{1}{4}}{7}$

اجبر المخارج البسيطة بضرب الطرفين في ٢٨

$$14\text{ك} + 12 + \frac{224\text{ك} - 112}{5\text{ك} + 3} = 14\text{ك} + 17 + 9$$

بالمقابلة والاصلاح $\quad \frac{224\text{ك} - 112}{5\text{ك} + 3} = 14$

ثم بالجبر $\quad 224\text{ك} - 112 = 70\text{ك} + 42$

بالمقابلة $\quad 154\text{ك} = 154 \quad$ وبالقسمة $\text{ك} = 1$

مثال ٧ $\quad \frac{1}{2}(5\text{ك} - 6) + \frac{1}{7}(4\text{ك} - 6\frac{2}{3}) = \frac{1}{14}(3\text{ك} + \frac{2}{3})$

اجبر المخارج الواقعة خارج الحصر واضرب الطرفين في ١٤

$$35\text{ك} - 42 + 8\text{ك} - 13\frac{1}{3} = 3\text{ك} + \frac{2}{3}$$

بالمقابلة $\quad 35\text{ك} + 8\text{ك} - 3\text{ك} = 42 + 13\frac{1}{3} + \frac{2}{3}$

بالاصلاح $\quad 40\text{ك} = 56 \quad$ بالقسمة $\text{ك} = \frac{56}{40} = 1\frac{2}{5}$

(١٥٢) ويعرض ان تكون المعادلة نسبة بشكل كسرين متساويين فيتسهل حلها بملاحظة قواعدها السابقة ونظريات الكسر (٧٩)

مثال ١ $\quad \frac{7\text{ك}}{5} = \frac{4}{3} \qquad \text{ك} = \frac{4 \times 5}{3 \times 7}$

بنقل الصورة مخرجا وبالعكس من طرف الكسر المجهول الى الكسر الاخر

(٢) $\frac{٥}{٢\text{ك}} = \frac{٩}{٧}$ ، $\frac{١}{\text{ك}} = \frac{٩ \times ٢}{٥ \times ٧}$ ، $\text{ك} = \frac{٥ \times ٧}{٩ \times ٢}$ (نظ ٣)

(٣) $\frac{٢}{\text{ك}} = -٥$ ، $\frac{٢}{٥} = -\text{ك}$ ، $\text{ك} = -\frac{٢}{٥}$ (٨٠)

(٤) $\frac{\text{ك} + ٤}{\text{ك}} = \frac{١٥}{١١}$ ، $\frac{\text{ك}}{٤} = \frac{١١}{٤}$ ، $\text{ك} = ١١$ (نظ ٥)

(٥) $\frac{٣\text{ك}}{٧ - ٢\text{ك}} = \frac{٩}{٥}$ ، $\frac{٣\text{ك}}{٧} = \frac{٩}{١٤}$ بالقسمة على $\frac{٣}{٧}$ $\text{ك} = \frac{٣}{٢}$

(٦) $\frac{\text{ك} + ٥}{٢٥} = \frac{\text{ك}}{٢٤}$ بموجب (نظ ٤) $= \frac{٥}{١١}$ او $\text{ك} = \frac{٢٤ \times ٥}{١١}$

(١٥٣) قد تودي عملية الجبر الى تطويل ممل فيتسهل العمل اذا امكن رد المعادلة الى صورة ابسط برفع الكسور واخراج الحدود الصحيحة او اصلاحها قبل الجبر مثلاً

$$\frac{٥\text{ك} - ٧}{\text{ك} + ١} = \frac{١٥\text{ك} - ١١}{٣\text{ك} + ١}$$

ومنها $٥ - \frac{١٢}{\text{ك} + ١} = ٥ - \frac{١٦}{٣\text{ك} + ١}$ باسقاط ٥ من الجانبين وقسمة الباقي على ٤

$\frac{٣}{\text{ك} + ١} = \frac{٤}{٣\text{ك} + ١}$ ومنها $٩\text{ك} + ٣ = ٤\text{ك} + ٤$ اي $\text{ك} = \frac{١}{٥}$

مثال اخر $\frac{٥\text{ك} - ٨}{\text{ك} - ٢} + \frac{٦\text{ك} - ٤٤}{\text{ك} - ٧} = \frac{١٠\text{ك} - ٨}{\text{ك} - ١} + \frac{\text{ك} - ٨}{\text{ك} - ٦}$

برفع الكسور $٥ + \frac{٢}{\text{ك} - ٢} + ٦ - \frac{٢}{\text{ك} - ٧} = ١٠ + \frac{٢}{\text{ك} - ١} + ١ - \frac{٢}{\text{ك} - ٦}$

اسقط ١١ من الجانبين واقسم على ٢

$\frac{١}{\text{ك} - ٢} - \frac{١}{\text{ك} - ٧} = \frac{١}{\text{ك} - ١} - \frac{١}{\text{ك} - ٦}$ بجبر كل طرف

$\frac{-٥}{(\text{ك} - ٢)(\text{ك} - ٧)} = \frac{-٥}{(\text{ك} - ١)(\text{ك} - ٦)}$ فالمخارج متساوية كالصور

$\text{ك}^٢ - ٩\text{ك} + ١٤ = \text{ك}^٢ - ٧\text{ك} + ٦$

بالمقابلة $٢\text{ك} = ٨$ $\text{ك} = ٤$

مثال٦ $\frac{\text{د}}{\text{ن} - \text{د}} - \frac{\text{ب}}{\text{ن} - \text{ب}} = \frac{\text{د} - \text{ب}}{\text{ن} - \text{ت}}$ باصلاح الطرف الاول

$\frac{(\text{د} - \text{ب})\text{ن}}{(\text{ن} - \text{د})(\text{ن} - \text{ب})} = \frac{(\text{د} - \text{ب})}{(\text{ن} - \text{ت})}$ اي $\frac{\text{ن}}{(\text{ن} - \text{د})(\text{ن} - \text{ب})} = \frac{١}{\text{ن} - \text{ت}}$.

ن² — ن ت = ن² — د ن — ب ن + ب د   بنقل المجهول لوحده

د ن + ب ن — ت ن = ب د   ن = (ب د)/(د + ب — ت)

تمرين

(١) ٤ ك — ١٦ + ٤ ك — ٦ = ٥ ك — ٦ — ٧ ك + ١١٤

(٢) ٥ (٥ — ك) — (٦ — ٢ ك) = ٢ (ك + ٢) — ٨ (ك — ٣)

(٣) ١٥٠ + ١٥ (٣ ك — ٥) = ١٥٦ + ٢١ (ك + ٣)

(٤) ك — [٤ + [ك — (٤ + ك)]] = ٥

(٥) ٧ ك — (٥ ك — ٧) — ١٠ = ٥ — ٢ ك — (٦ ك — ٤)

(٦) (ن + ٣) (٣ + ٢ ن) = ١٤ + (ن + ١) (٢ ن + ١)

(٧) (ك + ١) (٢ ك + ٤) — ك (٢ ك + ١) = ٢٠ + (ك² — ١) — (ك + ١)²

(٨) ٣ ك (ك + ٢) — ٢ (ك + ٣)² = (ك + ١)² — ٣٥

(٩) ٢ (ك² — ١) + ٤ (ك + ١) (ك + ٢) = ٦ (٤ + (ك² — ٣ ك + ٢))

(١٠) ٤ (ك + ٥)² — ٣ (ك — ٥) = ١٨٠ + (٢ ك + ١)²

(١١) (ك + ١٠)/٩ + (ك — ٨)/٢ = ١٢   (١٢) (ك + ١٠)/٥ + (ك — ٥)/١٠ = ٦

(١٣) ٧ — ٤ (ن + ٢)/٥ = — ٥ ك/١٢   (١٤) (ك + ١)/١٨ = (ك — ٩)/٨

(١٥) (ك + ٢)/٤ + (ك + ١)/٢ = (ك + ٥)/٦   (١٦) (٤ — ٥ ك)/٦ — ١٣/٤٢ = (١ — ٢ ك)/٣

(١٧) ٢ (ك — ٢)/٧ + ١٩/٢٨ ٥ = ٥ (ك + ٥)/٨   (١٨) ٦ + ٢ (ك — ٧)/٧ = ٢ (ك + ٢)/٣

(١٩) ٥ ك/٦ — (ك — ١٢)/٥ + (ك + ٣)/٢ = ١/٢ (ك/٤ — ٣) — ٥ ك/٤

(٢١) ك/٥ = ٦/٧   (٢٢) ٢ ك/١٣ = ٩/١٦   (٢٣) ٥/ن = ٣/٤

(٢٤) ٥/٧ = ٢/٣ ن   (٢٥) ١١/١٣ = ٢ ن/٥   (٢٦) ٨/ك = ٣

(٢٧) (ك — ٤)/٤ = ٥/٧   (٢٨) (ف + ١٢)/(ف + ١٤) = ٥/١٣   (٢٩) ٥/(٥ — ٢ ك) = ٢/٥

(٣٠) (ك — ٤)/٥ = ك/٣   (٣١) (٢ ك — ٢)/٧ = ٢ ك/٩٠

(٣٢) $\frac{٢\text{ك}+٧٥}{٢\text{ك}-١٥}=\frac{\text{ك}+٢٥}{\text{ك}-٥}$ (٣٣) $\frac{٣\text{ك}+٥٠}{\text{ك}+١٢}=\frac{٦\text{ك}+٨}{٢\text{ك}+١}$

(٣٤) $\frac{\text{ك}-٨}{\text{ك}-٦}-\frac{\text{ك}-٩}{\text{ك}-٧}=\frac{\text{ك}}{\text{ك}-٢}-\frac{\text{ك}+١}{\text{ك}-١}$

(٣٥) $\frac{\text{ك}+٣}{\text{ك}+٦}-\frac{\text{ك}+٢}{\text{ك}+٥}=\frac{\text{ك}+٦}{\text{ك}+٩}-\frac{\text{ك}+٥}{\text{ك}+٨}$

(٣٦) $\frac{٤\text{ك}-٣}{١٠}-\frac{\text{ك}-٣}{٢\text{ك}-١٥}=\frac{١١}{١٠}+\frac{٢\text{ك}-٥}{٥}$

(٣٧) $\frac{٤(\text{ك}+٣)}{٩}+\frac{٧\text{ك}-٢٩}{٥\text{ك}-١٢}=\frac{٨\text{ك}+٣٧}{١٨}$

(٣٨) $\text{د}\,\text{ك}-٢\text{ب}=٥\,\text{ب}\,\text{ك}-٣\,\text{د}$ (٣٩) $\text{ن}^{٢}+\text{د}^{٢}=(\text{ن}-\text{د})^{٢}$

(٤٠) $(\text{د}+\text{ن})(\text{ب}+\text{ن})=\text{ن}(\text{ن}-\text{ح})$

(٤١) $\text{ب}^{٢}(\text{ب}-\text{ك})-\text{ب}\,\text{د}\,\text{ك}=\text{د}^{٢}(\text{د}+\text{ك})$

(٤٢) $\frac{(\text{ن}-\text{ب})^{٢}}{٢\text{ن}-\text{د}}=\frac{\text{ن}-\text{ب}}{٢}$ (٤٣) $\frac{٢(٣\text{ف}+٢\text{د})}{٣\text{ف}+\text{د}}=\frac{٢\text{ف}+٣\text{د}}{\text{ف}+\text{د}}$

(٤٤) $\text{ن}^{٢}+\text{د}(٢\text{د}-\text{ن})-\text{د}^{٢}=\frac{٣\text{ب}^{٢}}{٤}+(\text{ن}-\frac{\text{ب}}{٢})^{٢}$

الفصل الثاني

في حل المسائل

ترتيب المعادلات . — فرض المجهول في المسائل التي تحتمل مجهولين او اكثر — تعيين مسمى للمجهول — استعمال الاشارة السلبية — الجواب السلبي

(١٥٤) حل مسألة جبرية يتوقف على معرفة ما يأتي ١ً تركيب المسألة بصورة معادلة اي بيان الروابط التي تفرضها المسألة بين الكميات المعلومة والمجهولة بصورة جبرية ٢ً حل المعادلات اي معرفة القيم الصالحة لمجاهيلها وقد سبق ذكره ٣ً مناقشة الحل فيما اذا كانت المسألة عامة اي معرفة الحدود التي يمكن ان تتراوح بينها الكميات المعلومة لامكان حل المسألة او عدمه والبحث عن الاحوال الخصوصية التي تعرض لها بين هذه الحدود وسياتي ذكره

(١٥٥) لا توجد قواعد خصوصية لايجاد هذه المعادلات التي تتنوع على اختلاف المسائل انما بصورة عمومية لنا هذه القاعدة : افرض المجهول اي حرف شئت من الحروف التي لادخل لها في المسألة بين المعلومات وعلى الغالب احد الحروف التي من ك الى ى كما تقدم (ومنهم من يستعمل حروف سعفص كلمن و ى للمجاهيل) ثم تصرف به كما لوكان عين المجهول بعد استخراجه واربطه مع الكميات المعلومة بالاشارات الجبرية حسب افادة المسألة مثلاً

اي عدد طرح منه ٥ ثم ضرب الباقي في ٩ فكان الحاصل مضاعف العدد مع ٤

ليكن المجهول ك واطرح منه ٥ فيبقى ك — ٥ اضرب هذا الباقي في ٩ فيحصل ٩ (ك — ٥) ثم خذ مضاعف العدد ٢ ك واجمع اليه ٤ فالمجموع ٢ ك + ٤ وحسب افادة المسألة ٩ (ك — ٥) = ٢ ك + ٤ وبالحل ك = ٧

(١٥٦) قد تكون المسألة على طريقة النسبة فتحول ثم الى معادلة بان يجعل حاصل الوسطين مساوياً حاصل الطرفين

مثلاً اي عدد نسبة مجموعه مع ٤ الى فضلته و١٤ :: ١٤ : ٥

ليكن العدد ك فمجموعه مع ٤ = ك + ٤ وفضلته و١٤ = ك — ١٤

وحسب المسألة ك + ٤ : ك — ١٤ :: ١٤ : ٥ بتحويلها كما ذكر

٥ (ك + ٤) = ١٤ (ك — ١٤) وبالحل ك = ٢٤

ولك ان تحول النسبة الى هيئة اخرى قبل تحويلها الى معادلة

مثلاً : اي عدد فضلته و١٤ الى ١٤ :: ٣ : ٢ . ليكن العدد ن

ن — ١٤ : ١٤ :: ٣ : ٢ بتركيب النسبة

ن : ١٤ :: ٥ : ٢ وبقسمة التالبين على ٢

ن : ٧ :: ٥ : ١ فالمعادلة ن = ٣٥

(١٥٧) قد ترى بعض المسائل بداهة انها ذات مجهول واحد كما في الامثلة السابقة وقد ترى ذات مجهولين او اكثر انما يمكن حلها بفرض مجهول واحد وتعين بقية المجهولات بتعينه كما في الاحوال الاتية

١ً اذا عرف مجتمع المجهولين مثلاً عددان مجتمعهما ٢٠ ليكون الاول م فالثاني ٢٠ — م

مسألة : اب قسم ١٧٠٠٠ غرش بين ولديه حنا وسليم وجعل ثلثي حصة حنا ثلثة ارباع حصة سليم فكم اصاب كلٌّ منهما

ترتيب المعادلة : لتكن حصة حنا ن وحصة سليم الباقي ١٧٠٠٠ — ن

وحسب المسألة $\frac{٢}{٣}$ ن = $\frac{٣}{٤}$ (١٧٠٠٠ — ن) وبالحل ن = ٩٠٠٠

٢ً : اذا علمت فضلة المجهولين اي تناسبهما العددي .مثلاً عددان فضلتهما ١٥ : ليكن الاكبر ك فالثاني ك — ١٥ او ليفرض الاصغر ك فالاكبر ك + ١٥

مسألة : تاجر زيد وعمرو وكان رامال عمرو يزيد عن رامال زيد ٢٠٠٠ غرشاً فربح زيد ٦٠٠٠ وخسر عمرو ١٠٠٠ فبقي عنده ثلثا ما صار عند زيد فكم كان رامال كل منهما

الحل : المطلوب راسمال زيد وراسمال عمر وقد عرف التناسب العددي بينهما ٢٠٠٠ فليفرض راسمال زيد ك فيكون راسمال عمر ك + ٢٠٠٠ ثم حسب المسالة يصير عند زيد ك + ٦٠٠٠ وثلثاه $\frac{٢}{٣}$ (ك + ٦٠٠٠) ويبقى عند عمر ك + ٢٠٠٠ — ١٠٠٠ فالمعادلة

$\frac{٢}{٣}$(ك + ٦٠٠٠) = ك + ١٠٠٠ وبالحل

ك = ٩٠٠٠ راسمال زيد وك + ٢٠٠٠ = ١١٠٠٠ راسمال عمر

٣ً اذا علم التناسب الهندسي بينهما اي خارج احدهما على الآخر مثلاً عددان احدهما ثلثة امثال الاخر . ليكن الاول ن فالثاني ٣ ن

مسألة اشتغل خليل خمسة ايام ووديع ٧ ايام وكانت اجرة خليل اليومية مضاعف اجرة وديع فاستحق لهما ٨٥ غرشاً فكم كانت اجرة كل منهما

المطلوب اجرة خليل واجرة وديع والتناسب الهندسي بينهما ٢ . لكن اجرة وديع اليومية ك فاجرة خليل ٢ ك ويحق للاول ٧ ك والثاني ٥ × ٢ ك غرشاً وحسب المسالة

٧ ك + ١٠ ك = ٨٥ بالحل

ك = ٥ اجرة وديع و ٢ ك = ١٠ اجرة خليل

٤ً اذا عرف حاصلهما مثلاً عددان حاصلهما ١٨ ليكن احدهما ن فالثاني $\frac{١٨}{ن}$

مسألة : عددان حاصلهما ٤٥ لو جمع ٨ الى الخارج من قسمة ٥ على الاول لكان المجتمع اقل من مضاعف الثاني بتسعة فما هما

المطلوب معرفة كل من العددين وقد علم حاصلهما ٤٥ . ليكن الاول ن فالثاني $\frac{٤٥}{ن}$ وحسب شروط المسألة

$\frac{٥}{ن}$ + ٨ = ٢ × $\frac{٤٥}{ن}$ — ٩ اي ١٧ = $\frac{٨٥}{ن}$ و ن = $\frac{٨٥}{١٧}$ = ٥ والثاني ٩

٥ً اذا عرفت النسبة الكائنة بينهما مثلاً عددان نسبة احدهما الى

الاخر :: ب، د ليكن الاول ك فيكون ب : د :: ك : الثاني ك × د/ب

مسألة : نسبة عمر اسعد الى عمر ابيه :: ١ : ٤ وثلثة امثال عمر اسعد مع ٢٦ سنة تزيد ١٤ سنة عن عمر ابيه فكم هو عمر كل منهما

ليكن عمر اسعد ك فيكون ١ : ٤ :: ك : عمر الاب ٤ ك

ثم ٣ ك + ٢٦ = ٤ك + ١٤ بالحل ك = ١٢ وعمر الوالد ٤٨

وما ذكر اشهر واسهل الطرق لمعرفة المجهول بتعيين الاخر وقد يتعين بحالات اخرى غير ان حلها حينئذٍ بفرض مجهولين اسهل على المبتدئين

٦ً ان يتعين الثاني بتعيين متعلق المجهول الاول مع عدد اخر بحالة مما ذكر انفاً : عددان احدها ثلثة امثال مجتمع الاخر الى ١٤ ليكن الثاني ك اجمع اليه ١٤ واضرب الحاصل في ٣ فالاول ٣ (ك + ١٤)

مسألة : يوسف وخليل نسخا كتباً فكان ما ينسخه يوسف يساوي مضاعف فضلة ما يكتبه خليل و١٤ صفحة فنسخا بمدة ٢٢ يوماً ١٨ صفحة زيادة عما ينسخه عادةً خليل في ٣٨ يوماً معاً ينسخه يوسف في ٣ ايام فكم صفحة كان يكتب كل منهما يومياً ليكن ما ينسخه خليل ك فيكون ما يكتبه يوسف يومياً ٢ (ك — ١٤) = ٢ك — ٢٨ وحسب شروط المسالة

٢٢ (ك + ٢ك — ٢٨) = ١٨ + ٣٨ك + ٣ (٢ك — ٢٨)

بالحل ك = ٢٥ و٢ × ٢٥ — ٢٨ = ٢٢ ما يكتبه يوسف

٧ً متى وجد رابط مما ذكر بين متعلق كل من المجهولين بعددين مختلفين مثلاً عددان مجتمع احدها و١٤ يساوي الخارج من قسمة الاخر على ٥ ليفرض الاول ك فمجموعه مع ١٤ يساوي ك + ١٤ وهو خمس الثاني فالثاني خمسة امثاله ٥ (ك + ١٤)

او ليفرض الثاني ك فخمسه ك/٥ وهو يزيد عن الاول ١٤ فالاول ك/٥ — ١٤ والفرض الاول افضل لانه سالم من الكسر

مسألة: عددان فضلة احدهما و ٥ تساوي ثلثة امثال الاخر. ومضاعف الاول مع سبعة امثال الثاني يساوي ٦٢

ليكن الثاني ك فثلثة امثاله ٣ك وهو فضلة الاول و٥ فالاول ٣ك + ٥

ثم ٢ (٣ك + ٥) + ٧ك = ٦٢ وبالحل ك = ٤ والاول ١٢ + ٥ = ١٧

تنبيه: ترى في المثال المتقدم ان تعيين احد المجهولين بفرض الاخر ايسر في القسم الاول من المسألة فمن الضرورة عند اجراء الفرض الانتباه الى اي قسم من المسألة اصلح للفرض فالاوجه الاربعة الاولى اصلح من الخامس ثم كل وجه اصلح مما بعده على الترتيب مثلاً

مجتمع ما ينفقه ابراهيم يومياً مع ٧ غروش يساوي مجتمع مضاعف ما يصرفه نعمة الى ٢٥ غرشاً وكان ما يصرفانه في ١٢ يوماً يساوي ٧٢٠

ترى ان تعيين احد المجهولين بفرض الاخر هو على الوجه السابع في القسم الاول من المسألة وعلى الوجه الاول في القسم الثاني لان ما يصرفانه معاً في ١٢ يوماً ٧٢٠ وفي اليوم ٦٠

ليفرض مصروف ابراهيم ك فمصروف نعمة ٦٠ — ك ثم حسب المسالة

ك + ٧ = ٢ (٦٠ — ك) + ٢٥

وبالحل ٣ ك = ١٣٨ ك = ٤٦ ومصروف نعمه ١٤

(١٥٨) مسمى المجهول: في كل المسائل السابقة فرض مسمى المجهول واحداً اي ك، ن، م الخ ويصح فرض المجهول ذا مسمى غير واحد حسب المقتضي لتسهيل العمل:

١ً اذا دلك السوأل على اية كمية يجب قسمة المجهول فافرضه ذا مسمى يساوي تلك الكمية والغرض من هذا الفرض التخلص من الكسر مثلاً اي عدد قسم على ٩ وجمع الى الخارج ٣ ثم ضرب المجموع في ٤ كان الحاصل ٤٨. الحل: ليكن المجهول ٩ك فتسعه ك ثم حسب المسألة

٤ (ك+٣) = ٤٨ اي ك = ٩ والعدد ٩ ك = ٨١

٢ً اذا كان ظاهر المسألة ذات مجهولين وعرفت النسبة الكائنة بينهما فافرض وحدة النسبة بينهما فيتعين المجهولان مثلاً

عددان نسبة احدهما الى الاخر :: ٢ : ٣ ومجتمع الاول مع ٤ يساوي فضلة الثاني و٦ : لتكن وحدة المتناسبين ك فالاول ٢ك والثاني ٣ك ثم

٢ك+٤=٣ك—٦ اي ك=١٠ فالاول ٢٠ والثاني ٣٠

مثال آخر: تاجران راسمال احدهما الى راسمال الاخر :: ٥ : ٦ وكان الاول يربح ٥ غروش في المئة والثاني ٤ غروش في المئة فربحا معاً ٩٨٠٠ غرشاً فكم كان ربح كل منهما

الحل: بموجب المسألة نسبة ما ربحه الاول الى ما ربحه الاخر كالتناسب المركب من ٥:٦ و٦:٤ اي ٢٥ : ٢٤ لذلك نفرض وحدة النسبة ن فيكون ربح الاول ٢٥ ن وربح الثاني ٢٤ ن وبموجب المسألة ٤٩ن=٩٨٠٠ اي ن = ٢٠٠ فربح الاول ٥٠٠٠ وربح الثاني ٤٨٠٠

(١٥٩) اذا تعددت مجاهيل المسألة وكان بين كل اثنين منها الروابط المذكورة آنفاً نفرض مجاهيلها على النمط السابق ايضاً مثلاً

اربعة اشخاص اشتروا داراً ثمنها ١٤٦٢٥ فدفع الثاني ثلثة امثال ما دفعه الاول ودفع الثالث قدر ما دفعه كلاهما ودفع الرابع قدر ما دفعه الثاني والثالث معاً فكم دفع كلٌّ منهم

الحل: ليفرض الاول ن فالثاني ٣ ن والثالث ن + ٣ن = ٤ ن والرابع ٣ ن + ٤ن = ٧ ن فالمعادلة

ن + ٣ن + ٤ن + ٧ن = ١٤٢٦٥ وبالحل ن = ٩٥١

فيكون ما دفعوه على الترتيب ٩٥١ ، ٢٨٥٣ ، ٣٨٠٤ ، ٦٦٥٧

مثال آخر: ترك رجل لبنيه الاربعة ١٤٢٠٠ واوصاهم ان

يقتسموا المبلغ على نسبة اعمارهم وكان عمر الاول ٢٢ والثاني ٢٠ والثالث ١٧ والرابع ١٢ سنة فكم اخذ كل منهم . الحل : افرض وحدة النسبة ك فتكون حصصهم ٢٢ك ٢٠ ك ١٧ك ١٢ك ومجموعها ٧١ ك

فالمعادلة ٧١ ك = ١٤٢٠٠٠ وك = ٢٠٠٠ ومقدار حصصهم ٤٤٠٠٠ , ٤٠٠٠٠ , ٣٤٠٠٠ , ٢٤٠٠٠

(١٦٠) يجب ان تكون الكميات جميعها في الطرفين من جنس ونوع واحد كيما يصح جمعها وطرحها ومساواتها والا وجب تحويلها الى مسمى واحد مثال ذلك

لعب حنا وحبيب وكان مع الاول ١٦ ريالاً (٢٣٠٠ غرش) ومع الثاني ٢٥٠ غرشاً فخسر حنا وبقي عنده قدر ما صار مع حبيب فكم خسر

لكن الربح ك غرشاً فيصير مع حبيب ك + ٢٥٠ غرشاً ويبقى مع حنا ١٦ × ٢٣٠٠ — ك اي ٣٧٠ — ك غرشاً وحسب المسألة

ك + ٢٥٠ = ٣٧٠ — ك اي ك = ٦٠ غرشاً

اخر : رجل اشترى ١٣٠ ثوباً من الخام والكتان ودفع ثمنها ١١٥ ليرة (٥ ريالات) وكان ثمن الثوب من الخام ٢½ ريال ومن الكتان ١½ ليرة فكم ثوباً اخذ من كل منهما

لكن ما اشتراه ك ثوباً من الخام و ١٣٠ — ك ثوباً من الكتان فيكون ثمن الخام ٢½ ك ريالاً (½ ك ليرة) وثمن الكتان ٣/٢ (١٣٠—ك) ليرة فلا يصح ان تكون المعادلة

٢½ ك + ٣/٢ (١٣٠ — ك) = ١١٥ بل

ك/٢ + ٣ (١٣٠ — ك)/٢ = ١١٥ وبالحل ك = ٨٠ والكتان ٥٠

(١٦١) ومن الواجب الانتباه الى معنى السؤال واستعمال الاشارة الايجابية او السلبية حسبما يقتضيه فما فرضته ايجابياً بمعنى يقتضي فرضه

سلبياً بالمعنى المقابل والمقادير التي يمكن حملها الى معنيين مختلفين ما يأتي ١ً الوقت : ما يأتي بعد الحين المعين ايجابي وما سبقه سلبي ٢ً درجة الحرارة : مافوق درجة الصفر ايجابي وما تحتها سلبي ٣ً الطول والمسافة: اذا عيّنت نقطة او محلاً واعتبرت الطول والمسافة من تلك النقطة الى جهة ما ايجابياً يجب ان تعتبر البعد من النقطة ذاتها الى جهة تقابل الاولى سلبياً ومن هذا القبيل اعتبار الدرجات البعيدة عن خط الاستواء شمالاً ايجابية وجنوباً سلبية ٤ً الربح والخسارة او الزيادة والنقصان : فالاول ايجابي والخسارة سلبية

مثلاً تاجر ربح ١٠٠٠ ثم خسر ٤٠٠ فبقي عنده ٨٠٠ فكم كان راسماله

ك + ١٠٠٠ — ٤٠٠ = ٨٠٠ بالمقابلة ك = ٢٠٠

اخر : سفينة سافرت من خط الاستواء فسارت شمالاً ١٠ درجات ثم جنوباً ٥° ثم شمالاً ٢٥° فالى اية درجة وصلت بسفرها

ك = ١٠ — ٥ + ٢٥ = ٣٠ اي تقدمت ٣٠ درجة شمالاً

(١٦٣) الجواب السلبي : اذا كان جواب المسالة سلبياً دل على مقدار ينطبق على المسالة بمعنىً يقابل معناها المفروض اذا وجد والا فالمسألة غير ممكنة او فاسدة مثلاً رجل سار ٢٠ درجة شمالاً ثم ١٥ جنوباً ثم ١٣ شمالاً فوجد ذاته في الدرجة ١٦ شمالاً فكم كان بعيداً عن خط الاستواء شمالاً حين سافر

ك + ٢٠ — ١٥ + ١٣ = ١٦ ومنها ك = —٢

اي انه كان بعيداً ٢° جنوباً اي في جهة تخالف الجهة المفروضة في المسألة

٢ً رجل ربح ٩٠٠ ثم خسر ٤٠٠ وبقي معه ٤٠٠ فكم كان معه اولاً

الحل ك + ٩٠٠ — ٤٠٠ = ٤٠٠ و ك = — ١٠٠

اي لم يكن معه مال بل كان عليه دين خلافاً لطلب المسألة

٣ً عمر الاب ٥٠ سنة وعمر ابنه ٢٠ فبعد كم سنة يصير عمر الاب ثلثة امثال عمر الابن

الحل : ليكن بعد ك سنة فسيكون عمر الاب ٥٠ + ك والابن ٢٠ + ك وحسب المسألة ٥٠ + ك = ٣ (٢٠ + ك) ∴ بالحل ك = — ٥

اي ان عمر الاب لن يمكن ان يصير ثلثة امثال عمر الابن بل سبق ذلك ٥ سنوات فلو جعلنا المسألة متى كان عمر الاب ثلثة امثال عمر الابن لكانت المعادلة

٥٠ — ك = ٣ (٢٠ — ك) بالحل ك = ٥

اي قبل ٥ سنوات اذ كان عمر الاب ٤٥ والابن ١٥

٤ً خليل وفريد بينهما ١٢٠ ميلاً فسافرا في وقت واحد الى جهة واحدة مدة ٢٣ ساعة و٣٠ دقيقة وكان السابق خليل يقطع ١٢ ميلاً في الساعة والمتأخر فريد يقطع ١٨ ميلاً في الساعة فكم ميلاً يبقى بينهما حتى يلتقيا

لتكن المسافة المطلوبة س فيكون خليل حين سافرا بعيداً عن محل تلاقيهما بمقدار ٢٣ ½ × ١٢ + س اي ٢٨٠ + س ميلاً ويكون فريد بعيداً عن المحل المطلوب ١٢٠ ميلاً زيادة عنه اي ٢٨٠ + ١٢٠ + س = ٤٠٠ + س ميلاً وبما انهما سافرا في وقت واحد فمدة سفرهما متساوية فتكون المعادلة

$$\frac{٢٨٠ + س}{١٢} = \frac{٤٠٠ + س}{١٨}$$

وذلك بقسمة المسافة التي قطعها كل منهما على ما يقطعه في الساعة

وبالحل $٨٤٠ + ٣س = ٨٠٠ + ٢س$ اي $س = -٤٠$

فالجواب سلبي وقد فرضنا اولاً س المسافة الباقية لملاقاتهما اعتباراً من المحل الذي وصلا اليه بعد ٢٣ ساعة و٢٠ دقيقة فبما انها سلبية تدل على بعد الموقع الذي التقيا فيه قبل ان وصلا في سيرهما الى البعد المذكور

٥ً اجرة شحن الطن عن كل كيلو متر غرش واحد واجرة تحميله الى السكة قبل الشحن ١٫٥ غرش فالى كم كيلو متر يمكن شحن ٥٠ طن اذا دفع عنها ٧٠ غرشاً

ليكن البعد ك كيلو متر فاجرة التحميل $٥٠ \times ١٫٥ = ٧٥$ واجرة الشحن $٥٠ \times ك = ٥٠ ك$ فالمعادلة

$٧٥ + ٥٠ ك = ٧٠$ وبالحل $ك = -\frac{١}{١٠}$

واذ لا يصح ان نقول الى بعدٍ ما في الجهة المخالفة تكون المسألة فاسدة وفسادها واضح فان اجرة التحميل وحدها تزيد على المدفوع

تمرين

(١) اي عدد اذا اضيف اليه نصفه كان المجتمع ٢٤

(٢) اي عدد يزيد نصفه عن ثلثه ٣

(٣) اي عدد مجتمع نصفه وثلثه وثمنه ٤٦

(٤) عددان مجتمعهما ٩٨ واحدهما ثلثة ارباع الاخر فما هما

(٥) عددان فضلتهما ٧ واذا قسم اكبرهما على اصغرهما كان الخارج ٧

(٦) اي عدد اذا قسم على ٨ ثم طرح الخارج من ١٠٤ كان الباقي ٤٠

(٧) رجل اشترى عقاراً ثم باعه بمبلغ ٣٤٠٠ غرش فخسر $\frac{١}{١٨}$ من ثمنه فكم كان

(٨) فضلة عددين ٤ وفضلة مربعيهما ١١٢ فما هما

(٩) اي عددين حاصلها ١٠ اوالخارج من قسمة خمسة على احدها يقل ٣ عن مضاعف الاخر

(١٠) عددان مجتمع احدها الى مضاعف الاخر يساوي ٢٠ وسدس الاول يساوي نصف الثاني فماها

(١١) ثلثة اشخاص اقتسموا مبلغًا قدره ٥٤٦٠ غرشاً فنال الثاني منها $\frac{١}{٥}$ المبلغ زيادة على الاول واخذ الثالث $\frac{٥}{١٢}$ من المبلغ زيادة عن الاول فكم اخذ كل منهم

(١٢) رجل يزيد عمره ٣٠ سنة على عمر ابنه و بعد ٤ سنين يصير عمره اربعة امثال عمر ابنه فما هو عمر كل منهما

(١٣) رجل عمره ٤١ سنة وعمر ابنه ٥ فبعد كم سنة يصير عمر الاب ثلثة امثال عمر الابن

(١٤) اقسم ٥٢٥ الى قسمين لو قسم احدهما على ٢٥ والاخر على ٣٠ كان مجموع الخارجين ٢٠

(١٥) عربتان تقطع احداهما ستة اميال في الساعة والاخرى ١٠ فبعد ان سارت الاولى مدة ساعتين تبعتها الثانية فكم ميلاً يجب ان تسير حتى تدرك الاولى

(١٦) مزيج من الذهب والنحاس من عيار ٧٩ وزنه ٤٥٩ درهم فكم يلزم ان يستخرج منه من النحاس ليصير من عيار ٩٠

(١٧) اي كسر قيمته ٥ وفضلة صورته ومخرجه ١٨

(١٨) مال سعيد يساوي ثلثة ارباع مال عمر ومجتمع عشر مال سعيد واربعة اخماس مال عمر يساوي ٣٥٠ فكم هو مال كل منهما

(١٩) خادم معاشه السنوي ٣١٢ غرشاً وكان يأخذ علاوة عليه اكرامية شهرية فبعد ان خدم عشرة اشهر اخذ عما يحق له ٢٥٠ غرشاً

مع الاكرامية عن سنة كاملة فكم كان يأخذ سنويًا علاوة على اجرته

(٢٠) رجل وضع $\frac{٤}{٥}$ ماله بالمئة ٤ سنويًا والباقي بالمئة ٥ فبلغ ايراده السنوي ٢٩٤٠ غرشًا فكم كان راسماله

(٢١) تاجران راسمال احدهما الى راسمال الاخر :: ٢ : ٣ ومجموع فائدة مال الاول بالمئة ٥ وفائدة مال الثاني بالمئة ٤ يساوي ١٤١٠ فكم كان راسمال كل منهما

(٢٢) اربعة تجار ربحوا ٨٠٠٨٠ غرشًا فارادوا توزيع المبلغ بينهم على نسبة ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ حسب شروط الشركة فكم يحق لكل منهم

(٢٣) اشترك اربعة في تجارة فوضع الاول ٢٠٠٠ غرش والثاني ٢٥٠٠ والثالث ٧٠٠٠ والرابع ٨٥٠٠ فربحوا ٨٤٣٧٫٥ ووزعوها بينهم على نسبة راسمال كل منهم فكم اخذ كل منهم

(٢٤) ثلثة شركاء راسمال الاول منهم ب والثاني بَ والثالث بً ربحوا د غرشًا فكم يجب ان يأخذ كل منهم اذا اقتسموها على نسبة الراسمال

ماذا يفيد دستور هذه المسألة وهل ينطبق على قاعدة الشركة الحسابية

(٢٥) رجل اشترى طاولة بـ ١٤٠ غرشًا ثم باعها وربح خمس المبيع فبكم باعها

(٢٦) اي كسر مخرجه يزيد عن صورته ١ واذا طرح من صورته ١ واضيف الى مخرجه عدل $\frac{١}{٢}$

(٢٧) اربعة اشخاص اقتسموا بينهم ٩٣٨٠ غرشًا وكان كلما اخذ الاول ٢ اخذ الثاني ٣ وكلما اخذ الثاني ٥ اخذ الثالث ٦ وكلما اخذ الثالث ٣ اخذ الرابع ٤ فكم اخذ كل منهم

(٢٨) رجل مزج ٥٠ رطلاً من الخمر من سعر ٢٫٥ غرش و ٦٠ رطلاً منه من سعر ٣ غروش بكمية من الماء فبلغ ثمن الرطل من المزيج ٢ فكم كان الماء

(٢٩) عددان نسبة احدهما الى الاخر :: ب . د ولو اضيف ج الى كل منهما تصير نسبة الاول الى الاخر :: س :ص

(٣٠) اي عدد اذا اضيف الى صورة الكسر $\frac{د}{ب}$ ومخرجه تتضاعف قيمته

(٣١) زيد كان يشتغل ٦ ساعات يومياً وعمر ٧ غير ان زيدًا كان يشتغل في ٣ ساعات ما يشتغله عمر في ٤ واذ كانت اجرة ما يعملانه متساوية اخذا ٩٠٠ غرشاً فكم يحق لكل منهما

(٣٢) رجل كان يتنزه مدة ساعتين يومياً فيذهب راكباً عربة تقطع ١٢ كيلو مترًا في الساعة و يعود ماشياً فيقطع ٤٠٠٠ متر في الساعة فعلى اي بعد من محله يلزم ان يترك العربة ليعود و يصل اليه في الوقت المعين

(٣٣) مستودعان للفحم بينهما ٢٢٥ كيلو متر وسعر القنطار من المستودع الاول ١٢٠ غرشاً واجرة نقله ٣٠ بارة عن كل كيلو متر وسعر القنطار من المستودع الثاني ١٥٠ غرشاً واجرة نقله ٢٥ بارة عن كل كيلومتر فالى اي بعد من المستودعين يصل الفحم بسعر واحد

(٣٤) المفروض ف = $\frac{ر م ن}{١٠٠}$ (وجه ١٠)

لكن الراسمال ر مجهولاً فقط فكيف تستخرج قيمته من هذه المعادلة

(٣٥) لكن المعدل م . . . . .

(٣٦) . الاجل ن . . . . .

(٣٧) مسائل ومعادلات الدرجة الاولى ترد كما ستعلم (١٦٣) الى ص ك = د او ك = $\frac{د}{ص}$ فكيف تبرهن ان عملية الخطأين صحيحة (وجه ١٧)

(٣٨) خليل اشترى عدة اصناف كل خمسة منها بستة غروش ولو اشترى كل ثمانية منها بتسعة غروش لكان وفر من ثمنها تسعة غروش فكم صنفاً اشترى

(٣٩) عدد يزيد رقم عشراته واحدًا عن رقم احاده وقيمته تزيد ٩ على

خمسة امثال مجتمع رقميه فما هو

(٤٠) سئل رجل عن عمره فاجاب عمري يزيد سنتين عن مضاعف عمر امرأتي ومن ٣ سنين كان عمرها ثلث ما سيكونه عمري بعد ١٢ سنة فكم عمرها

(٤١) اي عدد اذا قُسِم على ١٥ كان مجتمع المقسومين والخارج ٤٧٣

(٤٢) رجل اشترى اذرعاً من الشيت بثمن ٧٢ غرشاً ثم اخذ منها لنفسه ٨ اذرع وباع ربع الباقي بعشرين غرشاً وربح خمسة غروش فكم ذراعاً اشترى

(٤٣) ساري مركب سقط عامودياً في الماء فلما بلغ اللجة بقي منه فوق الماء ٦ امتار ثم مال وبقي اسفله في مركز واحد اما رأسه فبلغ الماء وبعد عن مكانه الاول من سطح الماء عشرة امتار فكم كان طوله

(من المعلوم هندسياً ان مربع طول الساري يساوي مربع ما كان منه في الماء اولاً ومربع المسافة التي بين مكانه الاول والثاني من سطح الماء)

(٤٥) اربعة اقتسموا مالاً فاخذ الاول منهم سبع المال الا ستة غروش واخذ الثاني خمسة غروش زيادة عن الاول واخذ الثالث ١٢ غرشاً زيادة عن الثاني والرابع ١٧ غرشاً اكثر من الثاني فكم كان المال

(٤٦) اجير زادت اجرته في الشهر الثاني ٦٠ غرشاً وفي الثالث ٩٠ غرشاً فكانت نسبة اجرته في الشهر الثاني الى اجرته في الثالث :: ٣ : ٤ فكم اخذ في الشهر الاول

(٤٧) سليم ووديع ايرادهما واحد غير ان سليم كان ينفق شهرياً فوق ايراده ٢٠ غرشاً مع $\frac{1}{14}$ منه ووديع كان يقتصد شهرياً $\frac{1}{5}$ ايراده وبعد عشرة اشهر حصل مع وديع مبلغ يساوي المال الذي انكسر على سليم

مع $\frac{٤}{٧}$ ايراده فكم كان الايراد

(٤٨) ثوبان نسبة طول احدها الى طول الاخر :: ١٠ : ١٣ ولو اضيف الى الاول ٥ اذرع وطرح من الثاني ٦ تصير النسبة بين طوليها :: ٥ : ٤

(٤٩) توفيق واديب ولبيب معهم ٦٨٠٠غرش ونسبة مامع توفيق الى ما مع لبيب :: ٢ : ٣ وربع مال توفيق مع نصف مال لبيب يساوي ثلثة امثال مال اديب فكم كان مع كل منهم

(٥٠) رجل كان ينفق سنويًا د غرشًا ويضيف الى ما بقي من ماله في نهاية كل سنة قدر ثلثه وبعد ٣ سنين وجد ان ماله تضاعف فكم كان وكم كان ايضًا لو فرض د = ٥٠

(٥١) رجل كان يقتصد من اجرته يوم الشغل ب غرشًا وينفق في يوم البطالة د غرشًا فاقتصد بمدة ح يومًا س غرشًا فكم كانت ايام الشغل وايام البطالة

(٥٢) كم يومًا اشتغل لو فرضنا ب = ٣٤ د = ١٢ ح = ٤٨ س = ٥٠٤

(٥٣) ثلثة معهم سل ليمون وفيما هم نيام قام الاول واكل ٣ ليمونات وربع الباقي ونام ثم قام الثاني فاكل ست ليمونات وربع الباقي ونام فبقي للثالث قدر ما اكله كل منهما فكم كان في السل

(٥٤) ارنب سبق كلبًا بخمسين قفزة وكان كلما قفز الكلب ٣ قفزات قفز الارنب ٤ غير ان القفزتين من الكلب قدر ٣ قفزات من الارنب فكم قفزة يقفز الكلب قبل ان يدرك الارنب

(٥٥) قال حبيب الى سليم اعطني نصف ما معك فيكون معنا ١٠٠٠غرش ثمن دار نشتريها فاجاب سليم اعطني ثلث ما معك فيكون معنا المطلوب فكم كان مع كل منهما

(٥٥) عقرب الساعات بين ٣ و٤ فكم الوقت عند اقتران العقربين

(٥٦) رجل سار بقاربه نحو جريان المياه ١٢ميل في ٢٠ دقيقة ولو لم يساعده جريان المياه لاقتضى له نصف ساعة زيادة على ذلك فكم هي سرعة المياه في الساعة

(٥٧) رجل توفي عن زوجة حامل وترك ٤٢٠٠٠ غرشاً واوصى اذا ولدت غلاماً ان تعطى $\frac{١}{٣}$ المبلغ والباقي للغلام واذا ولدت بنتاً ان تعطى $\frac{٢}{٣}$ المبلغ والباقي للبنت غير ان زوجته ولدت توأماً صبياً وبنتاً فكم يجب ان يأخذ كل منهم حسب وصيته

الفصل الثالث

مناقشة عمومية في المعادلات ذات المجهول الواحد من الدرجة الاولى

(١٦٣) كيفما تقلبت المسائل وتنوعت اشكال المعادلات المذكورة يمكن تحويلها الى هيئة ب ك = د ذلك لان الجبر يزيل المخارج والمقابلة تفرز المعلوم من المجهول والاصلاح يرد مسميات ك الى مسمى واحد فالكميات ب ، د يمكن ان يكون كل منها كمية مركبة من حدود كثيرة وقيمة المجهول حسبما ذكر ك = $\frac{د}{ب}$

فلننظر في القيم التي يمكن ان تأخذها د و ب فنجد لنا اربعة احوال

١ً لكن د $\gtrless$ ٠ و ب $\gtrless$ ٠ فقيمة المجهول واحدة $\frac{د}{ب}$

٢ً لكن د = ٠ ب $\gtrless$ ٠ . . صفر $\frac{٠}{ب}$

٣ً لكن د $\gtrless$ ٠ و ب = ٠ . . مستحيلة $\frac{د}{٠}$

٤ً لكن ب = ٠ و د = ٠ . . غير معينة $\frac{٠}{٠}$

ترى في الحالة الاولى خارج المقسومين الوحيد هو قيمة المجهول لاغير وفي الحالة الثانية المقسوم صفر فالخارج صفر وفي الحالة الثالثة اي ك = د/٠ تكون المعادلة مستحيلة وعديمة الفائدة لانه مهما كانت قيمة المجهول حاصلها في صفر صفر دائمًا ود مفروضة غير صفر فلا يمكن مساواة الطرفين ٠ × ك = د مع ذلك يعبر عن هذا الشكل باللانهاية اي

ك = د/٠ = ∞ ما لا ينتهي

و بيان ذلك انه من المعلوم اذا بقيت الصورة على حالها فقيمة الكسر تزيد كلما قل المخرج مثلاً

$$\frac{١٤٠}{١} = ١٤٠ \quad ، \quad \frac{١٤٠}{٠{,}١} = ١٤٠٠ \quad ، \quad \frac{١٤٠}{٠{,}٠٠١} = ١٤٠٠٠٠$$

وهكذا متى صار المقسوم عليه صفرًا او اصغر ما يمكن تصير قيمة الكسر عديمة الانتهاء ويدل نظير هذا الجواب في حل المسائل الهندسية على توازي الخطين اي امتدادهما الى ما لا نهاية له دون ان يتلاقيا

وفي الحالة الرابعة تكون قيمة ك غير معينة لانه مهما فرضت قيمتها لا بد ان يكون حاصل ٠ × ك = ٠

وعلى هذا الوجه تجب مناقشة كل مسألة حرفية بنوع خاص مثال ذلك كسر قدره ب/د اضيف الى صورته ومخرجه مقدار واحد فكم يزيد الكسر الثاني

الحل : الكسر الاصلي ب/د والثاني (ب+ك)/(د+ك) ومقدار زيادة الثاني ل

$$ل = \frac{ب+ك}{د+ك} - \frac{ب}{د} = \frac{ب د + د ك - ب د - ب ك}{د(د+ك)} = \frac{ك(د-ب)}{د(د+ك)}$$

مناقشة المسألة : اذا كانت قيمة الباقي ايجابية يكون الكسر المفروض

قد زاد والا فقد نقص ولمعرفة قيمات الباقي المختلفة علينا ان نستعلم قيمات ب ، د ، ك المختلفة ايضاً

١ً ليكن ب = د اي د — ب = ٠ فقيمة الباقي صفر ايضاً لان ك (د — ب) = ٠ فالكسر المفروض لا تتغير قيمته مثلاً $\frac{٢}{٢} = \frac{٢+٥}{٢+٥}$

٢ً ك > ٠ { د — ب > ٠ ل الباقي ايجابي فالكسر يزيد $\frac{٢+٣}{٥+٣} > \frac{٢}{٥}$
د — ب < ٠ ل ٠ سلبي فالكسر ينقص $\frac{٥+٣}{٢+٣} < \frac{٥}{٢}$ }

٣ً د — ب > ٠ ، ك < ٠ { الصورة سلبية والمخرج بفرض } { د + ك > ٠ ايجابي ل سلبية والكسر يزيد
د + ك < ٠ سلبي ل ايجابية ٠ ينقص }

$\frac{٢+(-١)}{٥+(-١)} < \frac{٢}{٥}$ $\frac{٢+(-٧)}{٥+(-٧)} > \frac{٢}{٥}$

٤ً د — ب < ٠ ، ك < ٠ { الصورة والمخرج ايجابية بفرض } { د + ك > ٠ ايجابي ل ايجابية والكسر يزيد
د + ك < ٠ سلبي ل سلبية ٠ ينقص }

$\frac{٥+(-١)}{٢+(-١)} > \frac{٥}{٢}$ $\frac{٥+(-٧)}{٢+(-٧)} < \frac{٥}{٢}$

تمرين

(١) اجد عدداً لو جمع اليه سدسه و ١٠ ثم طرح منه نصفه لساوى الباقي ثلثي العدد و ١٦

(٢) قال سليم لامين اضمر عدداً وخذ مني مثله وخذ من حنا د ثم اسقط نصف ما صار معك واعد لي ما اخذته مني فيكون الباقي معك $\frac{١}{٢}$ د فهل عرف سليم ما اضمر امين وكم اضمر

(٣) اي عدد لو جمع اليه سدسه و ١٠ ثم طرح منه نصفه ساوى الباقي مضاعف مجموعه الى ٥

(٤) سليم وخليل بينهما اميال= ب فسارا وكان السابق سليم بقطع د ميلاً في الساعة وخليل ح ميلاً في كل ساعة ففي كم ساعة يدرك خليل سليماً

(٥) متى يدركه بفرض ب > ٠ و د–ح > ٠ او = ٠ او < ٠
٠ ٠ ٠ ب = ٠ و د–ح > ٠ او = ٠ او < ٠
بيّن ذلك بالاعداد

(٦) نسبة مال سليم الى مال وديع :: ٢ : ٣ ولو اضيف الى الاول ١٠ والى الثاني ١٥ لصار ثلثة امثال الاول مضاعف الثاني فكم كان عند كل منهما

الفصل الرابع

في انواع المرجحات وقضاياها وصورة حلها

(١٦٤) لا بد لحل المجهول في المسائل الجبرية من بيان علائقه مع الكميات المعلومة اما بصورة مساواة ومعادلة كما رأيت واما بصورة مرجحة او عدم مساواة وهي عبارة جبرية تفيد عدم التساوي بين طرفيها بواسطة اشارتي الارجحية او عدم المساواة مثالها ب > د ود < ب

المرجحات اما من معنىً واحد وهي ما افادت جميعها الاكثرية فقط او الاقلية فقط نحو ٨ > ٦ ك > ب د > ٦
و ٦ < ٧ ب < ك ٥ < د

واما مختلفة المعنى وهي ما افاد بعضها الاكثرية و بعضها الاقلية نحو
٩ > ٥ , ب < ٦ , ه < ل

(١٦٥) ويجري العمل بهذه المرجحات باوليات وقضايا خاصة بها وهي اولية ١ : اذا اضيفت مقادير متساوية الى مقادير غير متساوية فالمجموع الاعظم للجانب الاعظم مثلاً ٥ > ٤ اجمع ٣ الى الجانبين ٨ > ٧

ك > ل   اجمع ب اليهما   ك+ب > ل+ب

ب+٥ > ٣د   اجمع ٤   ب+٩ > ٧+ د

اولية ٢ : اذا طرحت مقادير متساوية من مقادير غير متساوية فالباقي الاعظم من الجانب الاعظم

ب > ك   اطرح د من الجانبين ب — د > ك — د

٨ > ١٤   ٠   ٥ منهما   ٣ > ٩

نتيجة ١: اذا جمع الى جانبي مرجحة او طرح منهما مقدار واحد تبقى على معناها مثلاً   ٨ك — ٢   > ٧ك+٦

اجمع الى الجانبين ٢ واطرح منهما ٧ك

٨ك — ٧ك   > ٦+٢   او ك > ٨

نتيجة ٢ : يمكن نقل الحدود من جانب الى اخر بشرط تغيير علاماتها كما ترى في المثال السابق فان — ٢ صارت٢ في الجانب الايسر و٧ ك صارت سلبية في الجانب الاول

اولية ٣ : اذا ضربت مقادير غير متساوية في كمية مثبتة واحدة فالحاصل الاعظم للجانب الاعظم مثلاً   ك > ل   ٢ > م   ١٢ > ٥

اضرب في س ولتكن غير صفر

س ك > س ل   ٣س > م س   ١٢س > ٥س

نتيجة : يمكن ازالة المخارج المثبتة بضرب طرفي المرجحة بمعدودها الاصغر وابقاء اشارة الارجحية بمعناها مثلاً

د/٤ > م/ب   ب د > ٤ م   ك/٨ > د/٤   ك > ٢ د

اولية ٤ : اذا قسمت مقادير غير متساوية على كمية (مثبتة)واحدة فالخارج الاعظم من المقسوم الاعظم مثلاً

٥ ب > ١٥   و س٢ — د٢ > ٥ (س — د)

اقسم على ٥ وعلى س — د وليكن س — د ≻ ٠

ب ≺ ٣ س + د ≺ ٥

نتيجة : يمكن قسمة طرفي مرجحة على كمية مثبتة دون تغيير معناها

مثلاً ٥ك ≻ ٦٠ ومنها ك ≻ ١٢

(١٦٦) قضايا المرجحات ١: اذا ضرب جانبا مرجحة في كمية منفية ينقلب معناها اي الحاصل الاعظم للطرف الاصغر

ك ≻ ل اضرب في — ٥ — ٥ ك ≺ — ٥ ل

كذا لتكن م كمية (منفية) اقل من صفر اضرب فيها الجانبين

فيحصل ك م ≺ م ل بقلب اشارة الاعظمية الى اصغرية

البرهان: ك ≻ ل بالمقابلة ك — ل ≻ ٠

وبما ان م اقل من صفر فحاصلها في ك — ل اصغر من صفر اذاً

م ك — م ل ≺ ٠ ومنها م ك ≺ م ل

وهكذا اذا ضربت ٥ ≻ ٣ في — ٤ تصير — ٢٠ ≺ — ١٢

نتيجة ١ : يمكن ازالة المخارج السلبية من طرفي مرجحة بضربها في المخارج وعكس اشارة المرجحة

مثلاً $\frac{د}{—٢ب}$ ≻ ٥٠ اضرب في — ٢ ب

— ١٠٠ ب ≺ د

نتيجة ٢ : بما ان تبديل اشارات طرفي مرجحة من + الى — وبالعكس كالضرب في — يلزم عندئذٍ قلب اشارة المرجحة

مثلاً ك — ل ≻ د ﻫ — ب ≺ ١٢ ٩ ≻ ٤

— ك + ل ≺ — د — ﻫ + ب ≻ — ١٢ — ٩ ≺ — ٤

قضية ٢: اذا قسم طرفا مرجحة على كمية منفية اي اصغر من صفر يعكس معناها مثلاً

— ٣ ك > م   اقسم على —٣   ك > — م/٣

—ب س > د   اقسم على —ب   س > — د/ب

قضية ٣ : اذا جمعت مرجحتان من معنى واحد كل جانب منهما الى نظيره يحدث منهما مرجحة من معناها ايضاً

مثلاً   ك > ل   د > ه   اذاً   ك + د > ل + ه

البرهان: بالمقابلة فيهما   ك — ل > ٠   و د — ه > ٠

فكل من كميتي ك — ل و د — ه اعظم من صفر ومجموعهما اعظم منه ومن كل منهما ايضاً اي ك — ل + د — ه > ٠

بالمقابلة   ك + د > ل + ه

قضية ٤ : اذا طرحت مرجحة من اخرى من معناها كل جانب من نظيره لا تحدث دائماً مرجحة من معناهما بل قد يتساوى الباقيان او ينقلب معنى الارجحية فيهما

مثلاً   ب > ل   و د > م

فالباقي   ب — د   اما
- > ل — م   من معناها
- = ل — م   مساواة
- < ل — م   من عكس معناها

كذا من ٧ > ٤ اطرح ٣ > ١   الباقي   ٤ > ٣

٨ > ٦ اطرح ٤ > ٢   الباقي   ٤ = ٤

٨ > ٤ اطرح ٧ > ٢   الباقي   ١ < ٢

لذلك يقتضي التحذر من طرح مرجحتين

قضية ٥ : المرجحات الايجابية الطرفين اي كلا طرفيها اعظم من صفر تبقى بمعناها اذا رقيت الى قوة واحدة او جذرت من جذر واحد مثلاً

٥ > ٣   ٥² او ٢٥ > ٣² او ٩   و ١٢٥ > ٢٧

تنبيه : اذا لم يكن طرفا المرجحة ايجابيين بل كان احدهما او كلاهما اصغر من صفر لا يمكن تعيين معنى المرجحة التي تحدث منهما بالترقية او التجذير مثلاً −٣ ≺ ٥ ٩ ≺ ٢٥ −٧ ≻ ٣ ٤٩ ≻ ٩

(١٦٧) لنا من الاوليات والقضايا السابقة القواعد الآتية لحل المرجحات : ١ً المقابلة اي نقل المعلوم الى جهة والمجهول الى اخرى بتبديل العلامات وابقاء معنى الارجحية دائماً ٢ً الجبر اي الضرب في معدود المخارج بابقاء معنى الارجحية اذا كان مثبتاً وقلب معناها اذا كان المضروب فيه منفياً ٣ً القسمة على المسمى المجهول مع ابقاء معنى المرجحة ان كان المسمى مثبتاً او عكسه ان كان هذا منفياً

مثال ١ ٤ ك − ٣/٢ ≻ ٦ك/٥ + ١

بالجبر ٤٠ ك − ١٥ ≻ ١٢ك + ١٠

بالمقابلة ٢٨ ك ≻ ٢٥ ك ≻ ٢٥/٢٨

مثال ٢ (ك+٢)/٤ + ك/٢ ≺ (ك−٤)/٢ + ٣ , ≻ (ك+١)/٣ + ١/٢

اضرب في ١٢ ٣ك+٦+٤ك ≺ ٦ك−٢٤+٣٦ و≻ ٤ك+٦+٤

باصلاحها ٧ك+٦ ≺ ٦ك+١٢ و≻ ٦ك+١٠

بالمقابلة ك ≺ ٦

ومن ٧ ك + ٦ ≻ ٦ ك + ١٠ ك ≻ ٤

اي ك ≺ ٦ و ≻ ٤ واذا طلبت عدداً كاملاً ك = ٥

مثال ٣ ٧ س + ٢٣/−٣ ≻ ٢س/٣ + ٥

اضرب في −٣ −٢١ س + ٢٣ ≻ −٢ س − ١٥

بالمقابلة ٣٨ ≻ ١٩ س و ٢ ≺ س او س ≻ ٢

تمرين

ما هي قيمة المجهول في المعادلات الاتية

(١) ٥ ك − ٤ ≻ ١٦ (٢) ٨ ف − ٢ ≺ ١٤

(٣) ٢م + ٣ ≺ ٧ + م (٤) ف/٢ − ٥/٤ ≻ ٢ف

(٥) ي/٣ + ي/٢ + ي/٤ − ٦ ≺ ٨ + ي/٢

(٦) د ك + ٢د/٤ ≺ ك + ٢ب/٤

(٧) قطعة ارض مضاعف مساحتها الا ٦٠٠ ذراع اقل من مساحتها مع ٨٠٠ ذراع ولو زيد ٤٠٠ ذراع على ثلثة امثال مساحتها لكان المجموع اقل من اربعة امثالها الا ٧٠٠ فكم مساحتها

(٨) اي عدد مجتمع نصفه وربعه اقل من ٧٥ ومجتمع ربعه و٣٠ اقل من نصفه مع ١٥

(٩) سئل معلم عن عدد تلامذته فقال لو طرح ٧ من مضاعفه لكان الباقي اعظم من ٢٩ ولو طرح ٥ من ثلثة امثاله لكان الباقي اصغر من مجتمع مضاعفه و١٦ فكم كانت تلامذته

(١٠) اي عدد لو جمع ١٦ الى ثلثة امثاله لكان المجموع اعظم من مجتمع مضاعفه و٢٤ ولو جمع ٥ الى خمسيه لكان المجموع اصغر من ١١

(١١) راع سئل عن عدد غنمه فقال اضف ٢ الى ثلثة امثاله فيكون المجموع اعظم من مضاعفه و٦١ واطرح ٧٠ من خمسة امثاله فيكون الباقي اصغر من فضلة اربعة امثاله و٩ فكم كان عدد القطيع

الباب التاسع

في حل بقية معادلات ومسائل الدرجة الاولى

الفصل الاول

في حل مجهولي معادلتين

(١٦٨) لا بد لحل مجهولين من معادلتين متوافقتين غير متلازمتين وذلك للاسباب الآتية : ١ً معادلة ذات مجهولين لا تعين قيمتهما مثلاً

٤ ن + ف = ١٢ ومنها ف = ١٢ — ٤ ن

فلو فرضت ن = ١ لكانت ف = ٨ ولو فرضت ن = ٤ لكانت ف = — ٤ وهكذا تتغير قيمة ف تبعاً لقيمة ن المفروضة فلا بد من معادلة اخرى تتعين بها قيمة ن لتتعين قيمة ف

٢ً اذا كانت المعادلتان غير متوافقتين اي قيمة المجهول في احداهما غيرها في الاخرى فحل المجهولين مستحيل

مثلاً ٥ ك + ١٥ م = ٨ (١)

٤ ك + ١٢ م = ١٠ (٢)

بضرب (١) في ٤ و(٢) في ٥

٢٠ ك + ٦٠ م = ٣٢

٢٠ ك + ٦٠ م = ٥٠ } ومنهما ٣٢ = ٥٠

وذلك مستحيل فالمعادلتان متناقضتان لا يمكن حل المجهولين منهما

٣ً اذا كانت المعادلتان متلازمتين اي ان احداهما لازمة بلزوم الاخرى كأن تكون حاصلة من ضربها بعدد واحد او قسمتها عليه مثلاً

(١) ٤ ك — ٨ ى = ١٢
(٢) ك — ٢ ى = ٣ ‏ } ومنهما ك = ٢ ى + ٣

فالاثنتان بمقام معادلة واحدة لا تكفي حسبما سبق لتعيين المجهولين

(١٦٩) حل مجهولي معادلتين : لنا لذلك خمس صور (١) المقابلة (٢) التعويض (٣) افنا احد المجهولين بتوحيد مسمييه (٤) الضرب المنقطع او الدستور العام (٥) الضرب في كمية غير معينة

(١٧٠) قاعدة المقابلة : خذ قيمة احد المجهولين من المعلوم والمجهول الاخر في كلا المعادلتين وقابل بينهما فتحدث معادلة ثالثة تستخرج منها قيمة المجهول الثاني ثم عوض عن هذا المجهول بقيمته فتعرف قيمة الاخر مثلاً

ك — ن = ٤ ‏ } ومنها ن = ك — ٤
٢ ك — ن = ١٥ ‏ } ٠ ن = ٢ ك — ١٥

و بالمقابلة بينهما ك — ٤ = ٢ ك — ١٥ ومنها ك = ١١
ثم بالتعويض عن ك بقيمتها ن = ١١ — ٤ = ٧

مثال اخر ٥ ك — ٧ ى = ١٩ (١)
٣ ك + ٢ ى = ٣٠ (٢)

من (١) ك = $\frac{١٩ + ٧ى}{٥}$ ‏ } بالمقابلة بين القيمتين
ومن (٢) ك = $\frac{٣٠ — ٢ى}{٣}$ ‏ } $\frac{١٩ + ٧ى}{٥} = \frac{٣٠ — ٢ى}{٣}$

ومنها ى = ٣ ثم بالتعويض ك = $\frac{٣٠ — ٦}{٣}$ = ٨

(١٧١) قاعدة التعويض ٠ خذ قيمة احد المجهولين من المعلوم والمجهول الاخر في احدى المعادلتين ثم عوض بها عنه في الثانية فتنتج معادلة ثالثة ذات مجهول واحد تستخرج منها قيمته ثم تستعلم الاخر كما سبق مثلاً

٥ ك + ٤ ل = ٢٢ (١)
٣ ك + ل = ٩ (٢) ومن هذه المعادلة

ل = ٩ — ٣ ك (٣) عوض بها عن ل في المعادلة (١)

٥ ك + ٤ (٩ — ٣ ك) = ٢٢ ومنها ك = ٢

بالتعويض عن ك بقيمتها في (٣) ل = ٩ — ٦ = ٣

مثال اخر ٣ م — ٢ ى = ٥ (١)

٩ م + ٤ ى = ٣٥ (٢)

من (١) م = $\frac{٥ + ٢ى}{٣}$ (٣) وبالتعويض بهذه القيمة عن م في (٢)

(١٥ + ٦ ى) + ٤ ى = ٣٥ ومنها ى = ٢

بالتعويض عن ى بقيمتها في (٣) م = ٣

(١٧٢) قاعدة افنا احد المجهولين: اذا كان مسمى احد المجهولين متساوياً في المعادلتين فافنه بطرحهما او جمعهما حسب مشابهة اشارته فيهما او اختلافها والا فاضرب كل معادلة في مسماه من الاخرى فتوحد مسماه ثم اتم العمل كما سبق

مثال ١ ك + ى = ٢٢ (١)

ك — ى = ٨ (٢)

مسمى ى واحد في المعادلتين واشارتها مختلفة فيهما لذلك تفنى بجمعهما

اي ٢ ك = ٣٠ ثم ك = ١٥

كذا مسمى ك واحد في المعادلتين واشارتها متشابهة فيهما فتفنى بطرحهما

اي ٢ ى = ١٤ ثم ى = ٧

مثال (٢) ٥ ل + ٣ م = ٣٠ (١)

٧ ل + ٢ م = ٣١ (٢)

ليكن م المجهول المطلوب افناؤه فاضرب المعادلة (١) في ٢ و (٢) في ٣

١٠ ل + ٦ م = ٦٠ (٣) } بطرح (٣) من (٤)

٢١ ل + ٦ م = ٩٣ (٤) } ١١ ل = ٣٣

اي ل = ٣ وبالتعويض في (١) ١٥ + ٣ م = ٣٠ م = ٥

تنبيه ١ : اذا كان مسمى احد المجهولين في معادلة ضلعاً من مسماه في الثانية اضرب المعادلة الاولى في الضلع الاخر من مسمى المجهول في الثانية

٣ل + ٢ن = ١٦ (١)

٧ل + ٨ن = ٤٤ (٢) اضرب (١) في ٤

١٢ل + ٨ن = ٦٤ (٣) بطرح (٢) من (٣)

٥ل = ٢٠ و ل = ٤ وبالتعويض ن = ٢

تنبيه ٢ : اذا كان بين المسميين عاد فاضرب كل معادلة في مسمى المجهول المراد افناؤه في الاخرى مقسوماً على ذلك العاد الاكبر مثلاً

٥٤ك — ١٢١ى = ١٥ (١) مسمى ك = ٣ × ١٨

٣٦ك — ٧٧ ى = ٢١ (٢) مسمى ك = ٢ × ١٨

اضرب (١) في ٢ و٢ في ٣

١٠٨ك — ٢٤٢ى = ٣٠ } بطرحها

١٠٨ك — ٢٣١ى = ٦٣ } ١١ ى = ٣٣

ومنها ى = ١١ ثم بالتعويض عنها ك = ٣٣

وهذه الطريقة اخصر من الاولين لسهولة التخلص من المخارج رأساً

مثال بك + دم = ص (١)

بَك + دَم = صَ (٢)

اضرب (١) في بَ و (٢) في ب

بَب ك + بَ دم = بَص (٣) } بطرح (٤) من (٣)

بَب ك + ب دَم = ب صَ (٤) }

(بَ د — ب دَ) م = بَص — ب صَ بالقسمة على مسمى م

م = (بَ ص — ب صَ) / (بَ د — ب دَ) وبذات الطريقة ك = (صَ د — ص دَ) / (بَ د — ب دَ)

(١٧٣) قاعدة الدستور العام : كيفما تنوعت هيئات المعادلات يمكن ردها الى هيئة المثال السابق بالجبر وضم المسميات ولنا من نتيجة حله الدستور العام لحل مجهولي معادلتين وهو

اضرب المسميات على شكل متقطع واجعل فضلتهما مخرجاً مشتركاً لقيمتي المجهولين ثم عوض عن مسمى المجهول المطلوبة قيمته بالحد المعلوم المقابل له في نفس المعادلة فتكون لك صورة لقيمته مثال ذلك

اضرب المسميات على الشكل المتقطع $\text{ب} \, \text{بَ} \times \text{د} \, \text{دَ}$

فالمخرج المشترك ب دَ — بَ د

ثم اذا اردت استخراج قيمة ك عوض عن ب مسماها في المعادلة الاولى بالحد المعلوم منها ص وعن بَ مسماها في الثانية . بالحد المعلوم فيها صَ فتكون الصورة

$$\text{ص دَ — صَ د} \quad \text{اذاً} \quad \text{ك} = \frac{\text{ص دَ — صَ د}}{\text{ب دَ — بَ د}}$$

واذا طلب استخراج قيمة ى فنعوّض بالمخرج عن دَ مسمى ى بالمعلوم صَ وعن د بالكمية ص الحد المعلوم في نفس المعادلة فتكون الصورة

$$\text{ب صَ — بَ ص} \quad \text{و} \quad \text{ى} = \frac{\text{ب صَ — بَ ص}}{\text{ب دَ — بَ د}}$$

وترى انه لا فرق في ترتيب فضلة الحاصلين ب دَ — بَ د لان الصورة تتبع نفس الترتيب وقيمة الكسر لا تتغير بتغير اشارات الصورة والمخرج

مثال اخر ٣ ك — ٢ م = ٤

٢ ك + ٣ م = ٢٠ $\quad \text{٣} \, \text{٢} \times \text{-٢} \, \text{٣}$

المخرج ٣ × ٣ — ٢ × (—٢) = ١٣

صورة ك ٤ × ٣ — ٢٠ × (—٢) = ٥٢

صورة م ٣ × ٢٠ — ٢ × ٤ = ٥٢

ك = ٥٢/١٣ = ٤ ى = ٥٢/١٣ = ٤

اخر ٥ ك + ٣ م = ١٩ ٥/٧ × ٣/−٢

٧ ك — ٢ م = ٨

ك = (٨ × ٣ — ١٩ × (−٢)) / (٧ × ٣ — ٥ × (−٢))   م = (٧ × ١٩ — ٥ × ٨) / (٧ × ٣ — ٥ × (−٢))

ك = ٢ م = ٣

(١٧٤) قاعدة الضرب في كمية غير معينة. — وهي افرنسية نادر استعمالها لكن

٢ ك + ٣ ى = ١٨ (١)

٣ ك + ٥ ى = ٢٨ (٢)

اضرب احدى المعادلتين ولكن الاولى منهما في س (كمية غير معينة)

٢ س ك + ٣ س ى = ١٨ س (٣)

اطرح (٢) من (٣)

(٢ س — ٣) ك + (٣ س — ٥) ى = ١٨ س — ٢٨

و بما ان س كمية غير معينة يمكنا ان نجعل لها قيمة يفنى بها مسمى احد المجهولين. لنفنِ مسمى ك ولنجعل

٢ س — ٣ = ٠ اي س = ٣/٢

فتصير المعادلة (٣ س — ٥) ى = ١٨ س — ٢٨

ومنها ى = (١٨ س — ٢٨) / (٣ س — ٥)

ثم بالتعويض عن س بقيمتها ٣/٢

ى = (١٨ × ٣/٢ — ٢٨) / (٣ × ٣/٢ — ٥) = ٢

وتتم العمل حسبما سبق بالتعويض عن ك في احداهما (الاولى مثلاً)

٢ ك + ٦=١٨ ومنها ك = ٦

لنا من ذلك هذه القاعدة : اضرب احدى المعادلتين في كمية غير معينة وبعد جمعهما او طرحهما عين للكمية المضروب فيها قيمة يفنى بها مسمى احد المجهولين واستعلم قيمة المجهول الاخر ثم عوض عن هذا بقيمته في احدى المعادلتين واستخرج قيمة المجهول الاول

(١٧٥) : لا بد في كل الاصول السابقة من تحويل كلا المعادلتين قبل الحل الى صورة بسيطة فتصلح مسميات كل مجهول وتجعل المجهولين في جانب والحد المعلوم في اخر مثلاً

٥ (ك + ٢ى) — (٤ك + ١٢ى) = ١٣ (١)

٦ ك — ٨ ى — ٣ (ك — ٣ى) = ٣٢ (٢)

باصلاح الاولى ٥ك + ١٠ى — ٤ ك — ١٢ى = ١٣

اي ك — ٢ى = ١٣ (٣)

باصلاح الثانية ٦ك — ٨ى — ٣ك + ٩ى = ٣٢

اي ٣ك + ى = ٣٢ (٤)

بضرب (٤) في ٢ ٦ك + ٢ى = ٦٤ (٥)

اجمع (٣) و (٥) ٧ك = ٧٧ وك = ١١

بالتعويض عن ك في (٣) ١١ — ٢ى = ١٣ وى = — ١

مثال اخر ى + (ك — ٢)/٣ = (٥ ى — ك)/٢ (١)

ك + (٥ (٢ ى — ك))/٤ = ١ + (٦ ك — ٢ى)/٥ + ى (٢)

بالجبر فيهما ٦ى + ٢ك — ٤ = ١٥ى — ٣ك

٣٠ك + ٧٥ى — ٢٥ك = ٢٠ + ٢٤ك — ٨ى + ٢٠ى

باصلاحها $٥ك - ٩ى = ٤$ (٣)

$-٢٩ك + ٦٣ى = ٢٠$ (٤)

اضرب (٣) في ٧ $٣٥ك - ٦٣ى = ٢٨$ (٥)

اجمع (٤) و (٥) $٦ك = ٤٨$ و $ك = ٨$

عوّض عن ك بقيمتها في (٣) $٤٠ - ٩ى = ٤$ $ى = ٤$

(١٧٦) تنبيه : يحسن في معادلات بالصور الآتية حل مكفوء المجهول واجراء العمل عليه كالمجهول حسب القواعد السابقة و بعدئذ تحل المجهول

مثال ١ $\frac{٨}{ك} - \frac{٩}{ى} = ١$ (١)

$\frac{٤}{ك} + \frac{٣}{ى} = ٣$ (٢)

وحد مسمي $\frac{١}{ى}$ بضرب (٢) في ٣ او مسمى $\frac{١}{ك}$ بضربها في ٢

$\frac{١٢}{ك} + \frac{٩}{ى} = ٩$ (٣)

اجمع (١) و (٣) $\frac{٢٠}{ك} = ١٠$ $\frac{١}{ك} = \frac{١}{٢}$ $ك = ٢$

بالتعويض عن ك في (١) $٤ - \frac{٩}{ى} = ١$ ومنها $ى = ٣$

مثال ٢ $٢ى - ك = ٤ك ى$ (١)

$\frac{٤}{ى} - \frac{٣}{ك} = ٩$ (٢)

بقسمة (١) على ك ى $-\frac{١}{ى} + \frac{٢}{ك} = ٤$ (٣)

اضربها في ٤ $-\frac{٤}{ى} + \frac{٨}{ك} = ١٦$ (٤)

اجمع (٢) و (٤) $\frac{٥}{ك} = ٢٥$ $ك = \frac{١}{٥}$

عوض عن ك في (٢) $\frac{٤}{ى} - ١٥ = ٩$ $ى = \frac{١}{٦}$

تمرين

(١) ٢ك+٤ن=١٠ ، ٣ن−ك=١ (٢) ٢ن−ل=٩ ، ٥ن−٨ل=٢٨ (٣) ٩ل−م=٣٩ ، ل+٩م=٥٩

(٤) ك+٣م=١٨ ، ٤ك+م=١٧ (٥) ٤ن+٨م=٣٢ ، ن+١١م=٣٥ (٦) ١٥م+٧ى=٢٩ ، ٩م+١٥ى=٣٩

(٧) ٣٥ى−٢١ل=٦٣ ، ٢٨ى−١٩ل=٤٦ (٨) ١٥ل+١٨ن=٧٨ ، ١٩ل−٣٠ن=٤٦

(٩) ٢١م−٩ن=٢٤ ، ٣٥م+١١ن=٩٢ (١٠) ٨ك−٣ى=٧ ، ٣٦ك−١٣ى=٣٣

(١١) ٣ك=٨ى ، ١١ك=١٧ى+٣٧ (١٢) ن+١٨=ل ، ٣ن+٥ل=٦١

(١٣) ك/٢ + ى/٥ = ٥ك − ٥ى − ١٠ و ٥ك/٢ − ى/٢ = ٠

(١٤) ك + ى = ١٠٠٠ ، ك/١٩٫٢٥ + ى/١٠٫٤٧ = ٥٨

(١٥) (ك − ن)/٨ = (ك + ١٠)/١٠ = (٣ن − ٥)/٣

(١٦) (٨ − ى)/٦ = (ك + ٤)/٧ = ٢(٣ك + ى)/١٤

(١٧) ك/١١ − ٢ى/٩ = ٥ك − ٢٥ى − ١٠ = ٠

(١٨) ٥/ك + ١٦/ى = ٧٩ ، ١٦/ك − ١/ى = ٤٤ (١٩) ٢/ن + ٨/ى = ٢ ، ٥/ن + ٩/ى = ٦٧/٢٤ (٢٠) ٤/ك + ٢٧/ى = ٤٢ ، ١٠/ك − ٤٢/ى = −٤١

(٢١) ٨/ى − ٩/ك = ٧ ، ٦/ى + ٦/ك = ١ (٢٢) ٢٥/ك + ٢٤/ى = ١ ، ٢/ك + ٣/ى = ٧/٢٠ (٢٣) ٦/ى − ٢/ن = ١ ، ٨/ى + ١٥/ن = −١

(٢٤) ٣ (٤ى — ٥ن) = ٢ (ى+ن) + ٣
٤ (٣ى — ٢ن) = ٥ (ى — ن)) + ١١

(٢٥) (ى+٥) (ك+٧) = (ى+١) (ك — ٩) + ١١٢
٢ى + ١٠ = ٣ك + ١

(٢٦) ك+ى = ٣٨ ١/٥ — (٤ك+١٢ى) / ١٠ و ١ / ٢١ك + ١ / ٣٢ى = ٥٢ى / ٤٦٢كى

(٢٧) ١٦ك+٦ى—١ = (١٢٨ك² — ٨١ى² + ٢١٧) / (٨ك — ٣ى + ٢)

(١٠ك + ١٠ى — ٣٥) / (٢ك + ٢ى + ٣) = ٥ — ٥٤ / (٣ك + ٢ى — ١)

الفصل الثاني

في حل مجاهيل متعددة

(١٧٧) يشترط لحل مجاهيل متعددة وجود معادلات قدر عدد المجاهيل وغير متلازمة وغير متناقضة

اولاً: معادلات اقل من عدد المجاهيل لاتكفي لتعيين قيمتها مثلاً ليفرض ٣ك+٢ى—٥ف=٨ (١)
ك + ى + ف = ٦ (٢)

اي معادلتان وثلثة مجاهيل ك و ى وف: قيمة ك من المعادلة (٢)
ك = ٦ — ى — ف وبالتعويض بهذه القيمة عن ك في (١)
٣ (٦ — ى — ف) + ٢ى — ٥ف = ٨ او
ى+٨ف = ١٠ اي معادلة واحدة ذات مجهولين وهي لاتكفي كما سبق برهانه لحلها فلا بد لذلك من وجود معادلة ثالثة

ثانياً المعادلات المتلازمة مع الاخرى اي الناتجة منها لا عبرة لوجودها مثلاً

٥ ك — ٣ ى — ٢ ف = ١٦ (١)

١٢ ك + ١٧ ى + ٤ ف = ٦٧ (٢)

٢ ك + ى = ٩ (٣)

اضرب (١) في ٢ ١٠ ك — ٦ ى — ٤ ف = ٣٢ (٤)

اجمع (٢) و(٤) ٢٢ ك + ١١ ى = ٩٩ وهي تنتج ذات المعادلة (٣) فتكون معادلة واحدة لحل مجهولين وهي غير كافية للحل والمعادلة الثالثة لم تفد شيئاً لانها لازمة بلزوم الاخريين لذلك لا عبرة لوجودها

ثالثاً اذا كانت المعادلات المفروضة متناقضة فالسؤال فاسد والحل مستحيل مثلاً

ك + ٢ م — ل = ١٢ (١)

٥ ك + ١١ م + ٣ ل = ٥٤ (٢)

٨ ك + ١٧ م = ١٠٨ (٣)

بضرب (١) في ٣ ٣ ك + ٦ م — ٣ ل = ٣٦ (٤)

بجمع (٢) و(٤) ٨ ك + ١٧ م = ٩٠

وهذه المعادلة تناقض المعادلة الثالثة اذ لا يصح ان يكون ٩٠ = ١٠٨ فالمسألة فاسدة والحل مستحيل

(١٧٨) تحل مجاهيل عدة معادلات بالطرق السابقة لحل مجهولين

التعويض : خذ قيمة احد المجاهيل من معادلة وعوض بها عنه في بقية المعادلات فتنقص معادلة ويفنى مجهول ثم اتم العمل هكذا في المعادلات الحاصلة والمجاهيل الباقية حتى يتحول العمل الى معادلتين ومجهولين فتحلها حسب القواعد السابقة

٢ ك + ٣ م − ٤ ل + ٥ ن = ١٤ (١)
ك + ٢ م + ٢ ل − ١٠ ن = ٤ (٢)
٣ ك − ٤ م − ل + ٣ ن = ١ (٣)
٤ ك + م + ٢ ل + ن = ٢٤ (٤)

استعلم قيمة ك من احدى المعادلات ولتكن الثانية

ك = ٤ + ١٠ ن − ٢ م − ٢ ل (٥)

عوض عن ك في بقية المعادلات بقيمتها واصلح ما يكون فينتج

٢٥ ن − م − ٨ ل = ٦ (٦)
٣٣ ن − ١٠ م − ٧ ل = − ١١ (٧)
٤١ ن − ٧ م − ٦ ل = ٨ (٨)

بقيت ثلاث معادلات وثلثة مجاهيل نأخذ قيمة م من احداها (٦)

م = ٢٥ ن − ٨ ل − ٦ (٩)

عوض عن م في بقية المعادلات بقيمتها واصلح ما يكون فينتج

٧٣ ل − ٢١٧ ن = − ٧١ (١٠)
٥٠ ل − ١٣٤ ن = − ٣٤ (١١)

اي معادلتان ومجهولان وبحلها حسبما سبق ن = ١ ل = ٢

وبالتعويض عن ن ول بقيمتيهما في (٩)

م = ٢٥ − ١٦ − ٦ = ٣

وبالتعويض عن ن ول وم بقيمتها في (٥)

ك = ٤ + ١٠ − ٦ − ٤ = ٤

(١٧٩) توحيد المسميات : افن احد المجاهيل بتوحيد مسمييه في معادلتين ثم جمعهما او طرحهما تبعاً لاختلاف اشارته فيهما او مشابهتها ثم افنه على الطريقة ذاتها من معادلتين ومجهولين اخريين وهكذا الى ان تتحول

المعادلات الى معادلتين ومجهولين فتستخرج قيمتيهما وتتم العمل كما سبق

مثاله ٥ ك — ٧ م + ٣ن = ٤ (١)

٩ ك + ٤ م —٥ن = ٣٠ (٢)

٢ م — ٣ ك + ٦ن = ١ (٣)

خذ المعادلتين (١) و (٢) وافن م : اضرب (١) في ٤ و (٢) في ٧

من (١) ٢٠ك — ٢٨ م +١٢ ن = ١٦

من (٢) ٦٣ك + ٢٨م — ٣٥ ن = ٢١٠

ومنهما ٨٣ك — ٢٣ ن = ٢٢٦ ١َ

ثم خذ المعادلتين (٢) و (٣) وافن م : اضرب (٣) في ٢

من (٢) ٩ ك + ٤م — ٥ ن = ٣٠

من (٣) ٤ م — ٦ك +١٢ن = ٢

ومن طرحها ١٥ ك — ١٧ ن = ٢٨ ٢َ

فلنا من ذلك معادلتان ١َ و ٢َ ومجهولان ك و ن وبحلهما كما سبق

ك = ٣ ن = ١ وبالتعويض عن ك ون في (٣)

٢ م — ٩ + ٦ = ١ ومنها م = ٢

اما طريقتا الضرب في كمية غير معينة والضرب المتقطع او الدستور العام سنوردهما اتماماً لفائدة المطالعين والراغبين في الجبر الاعلى وهندسة الاجسام في الفصل الآتي (١٨٦ و١٨٧)

تمرين

(١) ٢ك+ى+ن=٧ ٣ك+٤ى+ن=١٤ ك+٢ى+٢ن=١١

(٢) ل—٣ك+٢م=١ ٣ل—٢ك+م=٢ ٢ل—ك+٣م=٩

(٣) ك+ى+ن=٦ ٢ك+٣ى+٤ن=٢٠ ٣ك+٥ى+٦ن=٣١

(٤) ك+٣ى+٣ل=١٦ ٢ك+ى—٢ل=١ ٤ك+٦ى+٣ل=٢٨

(٥) ك ــ ٥ى + ٢ن = ٧   ٤ك ــ ى + ٢ن = ٨   ٢ك + ٣ى ــ ن = ٥

(٦) ٣ك + ٦ن = ٤ى ــ ١٦   ٤ك ــ ى = ن + ٥   ك ــ ٣ى = ٢ن ــ ١

(٧) (ن + ك)/٢ = (ى + ن)/٤ = (ى + ك)/٦   ك + ى + ن = ٢٧

(٨) ى ــ ١ = ٢ك ــ ن   ٥ن ــ ٤ك = (ى ــ ك)/٣ = (ى ــ ن)/٣

(٩) م + (ن + ك)/٢ = ١٢٠   ن + (ك + م)/٣ = ٧٨   ك + (م + ن)/٤ = ٦١

(١٠) ك ــ ٥ف + ٧ى = ٧ك ــ ١١ف + دى = ك + ن + حى = ٣

(١١) ك + ى + ل = ٠   بحك + بدى + حدل = ١
(ب + ح) ك + (ب + د) ى + (ف + د) ل = ٠

(١٢) ك + ى/٢ + ن/٣ = ١٠   ١/٢ (ك + ن) + ى = ٩   ١/٤ (ك ــ ن) + ٧ = ٢ى

(١٣) ٢/ك ــ ٣/ى = ١٥/٢ن + ٧/ى = ٥/ن ــ ٣/ك = ٤

(١٤) ١/ك + ٢/ى + ٣/ن = ٢   ك/٢ + ى/٣ + ن/٤ = ٤١
٤/ك ــ ٦/ى + ٨/ن = ٢   (١٥) ك/٣ + ى/٤ + ن/٥ = ٣١
٥/ك ــ ٣/ى + ٢/ن = ٢   ك/٤ + ى/٥ + ن/٦ = ٢٥

(١٦) ك ــ ى + ن ــ م = + ٢   ن ــ ٣م + ٦ك ــ ١٥ى = ــ ٣٣
ى ــ ٢ن + ٣م ــ ٤ك = ٤   م ــ ٤ك + ١٠ى ــ ٢٠ن = ــ ٤٠

الفصل الثالث

في صور خصوصية للاختصار

تعرض بعض صور خصوصية قابلة للتسهيل والاختصار في العمل فيقتضي الانتباه اليها قبل المباشرة بالحل حسب القاعدة العمومية منها ١ً نقصان بعض المجاهيل في بعض المعادلات ٢ً سهولة حلها على قواعد النسبة ٣ً قرن معادلتين او اكثر معاً قبل توحيد المسميات

لاستحصال ماهو اصلح لافناء المجهول ٤ً وجود المعادلات على نظام دوري

(١٨٠) نقصان بعض المجاهيل في بعض المعادلات : لنا في هذه الصورة قاعدتان اولاً تعتبر المعادلة التي لا تحوى احد المجاهيل كأنها ناتجة من غيرها بعد افنائه فيبدأ بحل المجاهيل الموجودة في بقية المعادلات وبافناء ذلك المجهول من المعادلات الاخرى لاستحصال معادلات من نوعها

ثانياً اذا وجدت بعض معادلات كافية لحل مجاهيلها يبدا بحلها دون سواها مثلاً

ك + ٢ ى — ل = ٧ (١)

٣ ك — ى = ١٢ (٢)

٢ ك + ٣ ى + ل = ٢٣ (٣)

ترى ان المعادلة الثانية لا تحوى على المجهول ل فيجب حل ك و ى لهذا يقتضي افناء ل من (١) و (٣) لاستحصال معادلة اخرى نظير (٢) فلنا بجمع (١) و (٣) ٣ ك + ٥ ى = ٣٠ (٤)

ثم نحل ك و ى من المعادلتين (٢) و (٤) فبطرحهما

٦ ى = ١٨ و ى = ٣ وبالتعويض عن ى في (٢)

٣ ك — ٣ = ١٢ و ٣ ك = ١٥ و ك = ٥

ثم بالتعويض عن ك و ى في (١) بقيمتيهما

ل = ٥ + ٦ — ٧ = ٤

مثال ٢ ٣ ك — ٢ ى = ٦ (١)

٥ ك = ٢٠ (٢)

المعادلة (١) كافية لحل ك فلنا منها ك = ٤ ثم بالتعويض في المعادلة (٢) عن ك بقيمتها ١٢ — ٢ ى = ٦ ومنها ى = ٣

مثال (٣) ك + ل + م — ى = ٢ (١)

ك + ل + ٢ م = ١٦ (٢)

٢ ك + ل = ٨ (٣)

٥ك + ف = ١٣ (٤)

٣ل+٢ف =١٨ (٥)

ترى ان المجهول ف لايوجد الا في (٤) و (٥) فيجب افناؤه منهما لاستحصال معادلة اخرى من نوع البقية لذلك اضرب (٤) في ٢

١٠ ك + ٢ ف = ٢٦ (٦)

وبطرح (٥) منها ١٠ ك − ٣ ل = ٨ (٧)

لنا الان اربع معادلات الثلثة الاول والسابعة واربعة مجاهيل غير ان (٣) و (٧) معادلتان تحتويان على مجهولين فقط يمكن حلهما بسهولة

اضرب (٣) في ٣ ٦ك + ٣ل = ٢٤ (٨)

اجمع (٧) و (٨) ١٦ ك = ٣٢ وك=٢

ثم بالتعويض عن ك في (٣) لنا ل =٤ ثم بالتعويض عن ك ول في (٢) م = ٥ وبالتعويض عن ك ول وم في (١) لنا ى = ٩ وبالتعويض عن ك في (٤) لنا ف = ٣

(١٨١) سهولة الحل على قواعد النسبة : أجد بقواعد النسبة او نظريات الكسر السابقة معادلة غير المفروضة توافق اكثر منها للحل بافناء المجهول مثال (٤)

(١) $\frac{ك}{ب} = \frac{ل}{د}$

(٢) ك + ل = هـ

ترى ان المعادلة (١) تحوى على مجهولين ويسهل بواسطة القاعدة (٨٠ نظ ٤) ايجاد معادلة اكثر موافقة لافناء احد المجهولين وهي

$\frac{ك}{ب} = \frac{ل}{د} = \frac{ك+ل}{ب+د}$ (٣) بالتعويض فيها عن ك + ل

$\frac{ك}{ب} = \frac{هـ}{ب+د}$ وكذا $\frac{ل}{د} = \frac{هـ}{ب+د}$

بحلهما $\text{ك} = \frac{\text{ب ه}}{\text{ب}+\text{د}}$ $\qquad \text{ل} = \frac{\text{د ه}}{\text{ب}+\text{د}}$

مثال ٥ : $\frac{\text{ك}}{\text{ب}} = \frac{\text{ل}}{\text{د}}$ (١) $\qquad \frac{\text{ل}}{\text{د}} = \frac{\text{م}}{\text{ط}}$ (٢)

$$\text{ح ك} + \text{ت ل} + \text{ص م} = \text{س} \qquad (٣)$$

لنا حسب اولية (١) $\frac{\text{ك}}{\text{ب}} = \frac{\text{ل}}{\text{د}} = \frac{\text{م}}{\text{ط}}$

وحسب قاعدة النسبة (١٠٨) او نظرية الكسر (٧) يمكنا ايجاد معادلة انسب لافناء المجهولات كما يأتي اضرب الكسر الاول في ح والثاني في ت والثالث في ص

فيكون $\frac{\text{ح ك} + \text{ت ل} + \text{ص م}}{\text{ح ب} + \text{ت د} + \text{ص ط}} = \frac{\text{ك}}{\text{ب}} = \frac{\text{ل}}{\text{د}} = \frac{\text{م}}{\text{ط}}$ (٤)

وبالتعويض بهذه المعادلة عن ح ك + ت ل + ص م

$$\frac{\text{س}}{\text{ح ب} + \text{ت د} + \text{ص ط}} = \frac{\text{ك}}{\text{ب}} \text{ او } = \frac{\text{ل}}{\text{د}} \text{ او } = \frac{\text{م}}{\text{ط}}$$

ومنها $\text{ك} = \frac{\text{ب س}}{\text{ح ب} + \text{ت د} + \text{ص ط}}$

$$\text{ل} = \frac{\text{د س}}{\text{ب ح} + \text{ت د} + \text{ص ط}}$$

$$\text{م} = \frac{\text{ط س}}{\text{ب ح} + \text{ت د} + \text{ص ط}}$$

مثال ٦ $\frac{١}{\text{ك} + \frac{١}{\text{ن} + \frac{\text{ب}}{\text{ك}}}} = \frac{١}{\text{ك} - \frac{١}{\text{ن} - \frac{\text{د}}{\text{ك}}}}$ (١)

$$\frac{١}{\text{ن}}\left(١ - \frac{١}{\text{ك}}\right) = ١ \qquad (٢)$$

بما ان صورتي الكسرين في المعادلة (١) متساويتان فالمخرجان متساويان وباسقاط ك من كل منهما

$$\frac{١}{\text{ن}+\frac{\text{ب}}{\text{ك}}} = -\frac{١}{\text{ن}-\frac{\text{د}}{\text{ك}}} = \frac{١}{\frac{\text{د}}{\text{ك}}-\text{ن}}$$

وللسبب المار ذكره $\text{ن}+\frac{\text{ب}}{\text{ك}} = \frac{\text{د}}{\text{ك}}-\text{ن}$ وبالمقابلة

$$٢\,\text{ن} = \frac{\text{د}-\text{ب}}{\text{ك}} \quad \text{او} \quad \text{ن} = \frac{\text{د}-\text{ب}}{٢\,\text{ك}} \qquad (٣)$$

ولنا بجبر المعادلة (٢) $\text{ن} = ١-\frac{١}{\text{ك}}$ (٤)

بالمقابلة بينهما $١-\frac{١}{\text{ك}} = \frac{\text{د}-\text{ب}}{٢\,\text{ك}}$

بالجبر $٢\,\text{ك}-٢ = \text{د}-\text{ب}$

بالمقابلة والقسمة على ٢ $\text{ك} = \frac{\text{د}-\text{ب}+٢}{٢}$

بالتعويض عن ك في (٤) $\text{ن} = ١-\frac{٢}{\text{د}-\text{ب}+٢} = \frac{\text{د}-\text{ب}}{\text{د}-\text{ب}+٢}$

(١٨٢) قرن معادلتين او اكثر معاً : اجر ذلك لاستحصال معادلات اصلح للحل تكون كافية اما لافناء المجهولين واما لافناء احدهما والحد المعلوم

مثال ٧ $١٣\,\text{ك} + ٧\,\text{ى} = ٤٧$

$٧\,\text{ك} + ١٣\,\text{ى} = ٥٣$

بدلاً من ان تضرب (١) في ٧ و (٢) في ١٣ او بالعكس اجمع المعادلتين ثم اطرحهما وهكذا في كل الامثلة من هذا النوع

$٢٠\,\text{ك} + ٢٠\,\text{ى} = ١٠٠$ ومنها $\text{ك} + \text{ى} = ٥$

$-٦\,\text{ك} + ٦\,\text{ى} = ٦$ ومنها $-\text{ك} + \text{ى} = ١$

وهاتان اصلح للحل من (١) و (٢) وقد تم فيهما توحيد مسمي كل من المجهولين وبحلهما $\text{ى} = ٣$ $\text{ك} = ٢$

مثال ٨ على ذلك في ثلاث معادلات

ك + ى + ل = ١٢ (١)

ك + ٢ ى + ٣ ل = ٢٠ (٢)

١/٢ ك + ١/٢ ى + ل = ٦ (٣)

اضرب (٣) في ٣ فتحصل راساً معادلة يتوحد بها مسمياً كل من ك و ل

ك + ٣/٢ ى + ٣ ل = ١٨ (٤)

اطرح (٤) من (٢) ١/٢ ى = ٢ وى = ٤

اطرح (١) من (٢) ى + ٢ ل = ٨

عوض عن ى بقيمتها ٤ + ٢ ل = ٨ و ل = ٢

عوض عن ى و ل في (١) ك = ١٢ — ٢ — ٤ = ٦

مثال ٩ على ما ينتج معادلة صالحة لافناء احد المجهولين والحد المعلوم

٧ ك + ٢ ى — ٥ ف = ١٥ (١)

٤ ك + ٣ ى — ٢ ف = ١٥ (٢)

٩ ك + ٥ ى — ٣ ف = ٣٠ (٣)

اجمع (١) و (٢) ١١ ك + ٥ ى — ٧ ف = ٣٠ (٤)

وهذه المعادلة هي كافية لافناء ى والحد المعلوم اذا طرحنا (٣) منها

٢ ك — ٤ ف = ٠ و ك = ٢ ف

عوض عن ك في (١) و (٢)

٩ ف + ٢ ى = ١٥ (٦)

٦ ف + ٣ ى = ١٥ (٧)

بطرح (٦) من (٧) ى = ٣ ف

بالتعويض عن ى بقيمتها في ٦

١٥ ف = ١٥ وف = ١ اذاً ك = ٢ ى = ٣

وقد يناسب قرن المعادلتين بالقسمة لاستحصال معادلات يفنى بها المجهول

مثال ١٠

$$\frac{\text{ك} + \text{ل}}{\text{ن}} = \frac{\text{٤٤}}{\text{١٧}} \qquad (\text{١})$$

$$\frac{\text{ك} - \text{ل}}{\text{ن}} = \frac{\text{٢٠}}{\text{١٧}} \qquad (\text{٢})$$

$$\frac{\text{ك}^{\text{٢}} - \text{ل}^{\text{٢}}}{\text{ن}} = \frac{\text{٣٥٢٠}}{\text{١٧}} \qquad (\text{٣})$$

اقسم (٣) على (١) $\quad \text{ك} - \text{ل} = \text{٨٠}$

اقسم (٣) على (٢) $\quad \text{ك} + \text{ل} = \text{١٧٦}$

ومنهما $\quad \text{ك} = \text{١٢٨} \qquad \text{ل} = \text{٤٨}$

بالتعويض في (٢) عن (ك — ل) بقيمتها ٨٠

$$\frac{\text{٨٠}}{\text{ن}} = \frac{\text{٢٠}}{\text{١٧}} \ , \quad \frac{\text{٤}}{\text{ن}} = \frac{\text{١}}{\text{١٧}} \ , \quad \text{ن} = \text{٦٨}$$

(١٨٣) نظام المعادلات الدوري ٠ — هو التبادل الذي لو اجري بين مجاهيلها و بين معلوماتها او بين مسميات مجاهيلها في اية معادلة كانت من المعادلات المفروضة تحول الى معادلة اخرى منها

مثلاً $\quad \text{ك} + \text{٢ ى} = \text{د} \qquad \text{٢ ك} + \text{ى} = \text{ب}$

اجر التبادل بين ك وى و بين د و ب بحيث تنوب الواحدة منهما عن الاخرى

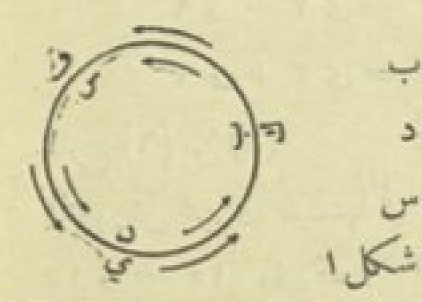
فتصير الاولى $\quad \text{ى} + \text{٢ ك} = \text{ب} \quad$ ذات الثانية

والثانية $\quad \text{٢ ى} + \text{ك} = \text{د} \quad$ الاولى

مثال اخر $\quad \text{ك} + \text{٢ ى} + \text{٣ ف} = \text{ب}$

$$\text{ى} + \text{٢ ف} + \text{٣ ك} = \text{د}$$

$$\text{ف} + \text{٢ ك} + \text{٣ ى} = \text{س}$$



شكل ١

لو اجري التبادل بين ف و ى و ك بحيث تنوب ف عن ى و ى عن ك و ك عن ف وكذلك بين س ، د ، ب بحيث تنوب س عن د ود عن ب و ب عن س حسبما ترى في الشكل لصارت المعادلة الاولى

ى + ٢ ف + ٣ ك = د نظير الثانية

وتصير الثانية نظير الثالثة والثالثة نظير الاولى وتمييز المعادلات الدورية عن غيرها ومعرفة كيفية التبادل فيها مهم كما سيأتي

(١٨٤) حل المعادلات الدورية : لنا لحل هذه المعادلات فضلاً عن الاختصارات السابقة طريقة اخرى وهي :

حل احد المجاهيل ثم اجر على الحلّ نفس التبادل الدوري الذي تراه جارياً على المعادلات الاصلية مثال ١١

ك + ى + ل = ب (١)

ى + ل + م = د (٢)

ل + م + ك = س (٣)

م + ك + ى = ط (٤)

يمكننا بضم هذه المعادلات ان نستخرج حسبما تقدم معادلة تصلح لافناء ثلثة مجاهيل معاً وهي

٣ ك + ٣ ى + ٣ ل + ٣ م = ب + د + س + ط

او ك + ى + ل + م = $\frac{1}{3}$ (ب + د + س + ط) (٥)

بطرح المعادلة (١) من (٥)

م = $\frac{1}{3}$ (ب + د + س + ط) ــ ب

وبما ان المعادلات الاصلية دورية يمكننا اجراء التبادل الدوري على هذا الحل بين ل ، ى ، ك ، م ، وبين ط ، س ، د ، ب بحيث تنوب كل كمية عما بعدها (ويحسن وضعها على محيط دائرة بهذا الترتيب)

ك = ١/٢ (ب + د + س + ط) — د

ى = ١/٢ (ب + د + س + ط) — س

ل = ١/٢ (ب + د + س + ط) — ط

وذلك ما نجده ايضاً بطرح كل من المعادلات المفروضة من المعادلة الخامسة

مثال اخر (١٢) به مسميات للمجاهيل

ك + ٢ ى + ٣ ف = ب (١)

ى + ٢ ف + ٣ ك = د (٢)

ف + ٢ ك + ٣ ى = س (٣)

اجمع اطراف هذه المعادلات الى بعضها ثم اقسم على ٦

ك + ى + ف = ١/٦ (ب + د + س) (٤)

اطرح (١) من (٢) ٢ ك — ى — ف = د — ب (٥)

اجمع (٤) و (٥) ٣ ك = ١/٦ (ب + د + س) + د — ب

بالقسمة على ٣ ك = ١/١٨ (ب + د + س) + ١/٢ (د — ب)

اما تتمة العمل فهكذا اطرح (٢) من (٣) واجمع المعادلة الحاصلة الى المعادلة (٤) فتحل قيمة ى ثم اطرح (٣) من (١) واجمع المعادلة الحاصلة الى (٤) ايضاً فتحل قيمة ف غير انه بما ان هذه المعادلات دورية اذ يمكن تبادل ف ، ى ، ك و س ، د ، ب اجرِ نفس التبادل بقيمة ك فيحصل

ى = ١/١٨ (د + س + ب) + ١/٢ (س — د)

ثم بهذه ف = ١/١٨ (س + ب + د) + ١/٢ (ب — س)

مثال ١٣ (مسميات المجاهيل فيه ذات الحدود المعلومة)

ب ن + ث ى = د (١)

ث ك + د ن = ب (٢)

د ى + ب ك = ث (٣)

اضرب (١) في — د　　— د ب ن — د ث ى = — د^2　(٤)

اضرب (٢) في ب　　ب ث ك + ب د ن = ب^2　(٥)

اضرب (٣) في ث　　د ث ى + ب ث ك = ث^2　(٦)

اجمع هذه الثلاث　　٢ ب ث ك = ب^2 + ث^2 — د^2

ومنها بالقسمة ك = (ث^2 + ب^2 — د^2) / (٢ ب ث)　(٧)

ولا حاجة للعمل بالمعادلات السابقة لحل ى و ن لانها دورية وحل احد مجاهيلها كافٍ لحل البقية لذلك اجر التبادل على المعادلة (٧) بين ن، ى، ك وبين ث، ب، د دوراً ثم اخر

ى = (د^2 + ث^2 — ب^2) / (٢ ث د)

ن = (ب^2 + د^2 — ث^2) / (٢ د ب)

ولا فرق فيما اذا كان التبادل الدوري بين المجاهيل و بين الحدود المعلومة او كما سبق بين المجاهيل و بين مسمياتها مثال (١٤)

ك + ى + ن = ١　(١)

د ك + ب ى + ث ن = ج　(٢)

د^2 ك + ب^2 ى + ث^2 ن = ج^2　(٣)

افن المجهول ن : اضرب (١) في ث

ث ك + ث ى + ث ن = ث　(٤)

اطرح (٤) من (٢)

(د — ث) ك + (ب — ث) ى = ج — ث　(٥)

اضرب (٢) في ث

ث د ك + ث ب ى + ث^2 ن = ث ج　(٦)

اطرح (٦) من (٣)

$$(\text{د} - \text{ث})\ \text{د}\,\text{ك} + (\text{ب} - \text{ث})\ \text{ب}\,\text{ى} = \text{ج}\ (\text{ج} - \text{ث}) \qquad (٧)$$

لنستخرج من (٥) و (٧) قيمة ك : وحد مسمى ى فيهما اضرب (٥) في ب

$$(\text{د} - \text{ث})\ \text{ب}\,\text{ك} + (\text{ب} - \text{ث})\ \text{ب}\,\text{ى} = \text{ب}\ (\text{ج} - \text{ث}) \qquad (٨)$$

اطرح (٨) من (٧)

$$(\text{د} - \text{ب})\ (\text{د} - \text{ث})\ \text{ك} = (\text{ج} - \text{ب})\ (\text{ج} - \text{ث})$$

ومنها

$$\text{ك} = \frac{(\text{ج} - \text{ب})(\text{ج} - \text{ث})}{(\text{د} - \text{ب})(\text{د} - \text{ث})} \qquad (٩)$$

ولا حاجة لاستخراج ى و ن بالتعويض عن ك وغير ذلك مما مر بك من العمليات لان هذه المعادلات دورية لامكان اجراء التبادل بين ن، ى، ك وبين مسمياتها ث، ب، د دون تغيير فيها فلنجرِ هذا التبادل في (٩)

$$\text{ى} = \frac{(\text{ج} - \text{ث})(\text{ج} - \text{د})}{(\text{ب} - \text{ث})(\text{ب} - \text{د})}$$

$$\text{ن} = \frac{(\text{ج} - \text{د})(\text{ج} - \text{ب})}{(\text{ث} - \text{د})(\text{ث} - \text{ب})}$$

(١٨٥) : تجري طرق الاختصار المارة على المعادلات التي ينبغي فيها قبل حل المجاهيل استخراج مكفوءاتها مثال ١٥

$$\frac{1}{\text{ك}} + \frac{1}{\text{ن}} = \text{د} \qquad (١)$$

$$\frac{1}{\text{ن}} + \frac{1}{\text{ى}} = \text{ب} \qquad (٢)$$

$$\frac{1}{\text{ى}} + \frac{1}{\text{ك}} = \text{ه} \qquad (٣)$$

اجمع هذه المعادلات لاستحصال معادلة يمكن بواسطتها افناء مجهولين

$$\frac{2}{\text{ك}} + \frac{2}{\text{ف}} + \frac{2}{\text{ي}} = \text{د} + \text{ب} + \text{ه}$$

بالقسمة على ٢ $\frac{1}{\text{ك}} + \frac{1}{\text{ف}} + \frac{1}{\text{ي}} = \frac{\text{د} + \text{ب} + \text{ه}}{2}$ (٤)

اطرح (١) من (٤)

$$\frac{1}{\text{ي}} = \frac{\text{د} + \text{ب} + \text{ه}}{2} - \text{د} = \frac{\text{ب} + \text{ه} - \text{د}}{2}$$

ومنها $\text{ى} = \frac{2}{\text{ب} + \text{ه} - \text{د}}$ (٥)

ولا حاجة لطرح (٢) و (٣) من (٤) لاستحصال مكفوّي ف و ك ثم حلهما بل اجر دور التبادل على المعادلة (٥) بين ف ، ك، ى و بين ب، د ه فيحصل من ذلك $\text{ك} = \frac{2}{\text{ه} + \text{د} - \text{ب}}$

ثم على هذه $\text{ف} = \frac{2}{\text{د} + \text{ب} - \text{ه}}$

(١٨٦) الضرب في كمية غير معينة : ليكن المطلوب حل المعادلات الاتية

$$\text{ب}_1\,\text{ك} + \text{د}_1\,\text{ل} + \text{س}_1\,\text{م} = \text{ج}_1 \qquad (1)$$

$$\text{ب}_2\,\text{ك} + \text{د}_2\,\text{ل} + \text{س}_2\,\text{م} = \text{ج}_2 \qquad (2)$$

$$\text{ب}_3\,\text{ك} + \text{د}_3\,\text{ل} + \text{س}_3\,\text{م} = \text{ج}_3 \qquad (3)$$

اضرب المعادلة الاولى في ن والثانية في ف واجمع للحاصلين (٣)

$$(\text{ب}_1\,\text{ن} + \text{ب}_2\,\text{ف} + \text{ب}_3)\,\text{ك} + (\text{د}_1\,\text{ن} + \text{د}_2\,\text{ف} + \text{د}_3)\,\text{ل}$$

$$+ (\text{س}_1\,\text{ن} + \text{س}_2\,\text{ف} + \text{س}_3)\,\text{م} = \text{ج}_1\,\text{ن} + \text{ج}_2\,\text{ف} + \text{ج}_3 \qquad (4)$$

ثم لنجعل مسمى ل و م صفرًا فتصير المعادلة

$$(\text{ب}_1\,\text{ن} + \text{ب}_2\,\text{ف} + \text{ب}_3)\,\text{ك} = \text{ج}_1\,\text{ن} + \text{ج}_2\,\text{ف} + \text{ج}_3$$

ومنها $\text{ك} = \frac{\text{ج}_1\,\text{ن} + \text{ج}_2\,\text{ف} + \text{ج}_3}{\text{ب}_1\,\text{ن} + \text{ب}_2\,\text{ف} + \text{ب}_3}$ (٥)

ثم لنعين قيمتي ن و ف من معيني ل و م ونعوض عنهما

$د_1 ن + د_2 ف + د_3 = ٠$ او $د_1 ن + د_2 ف = - د_3$

$س_1 ن + س_2 ف + س_3 = ٠$ او $س_1 ن + س_2 ف = - س_3$

بحلهما حسب الاصول السابقة

$$ن = \frac{- د_3 س_2 + س_3 د_2}{د_1 س_2 - س_1 د_2} \qquad ف = \frac{س_1 د_3 - د_1 س_3}{د_1 س_2 - س_1 د_2}$$

عوض في (٥) عن ن و ف واضرب الحدين في $د_1 س_2 - س_1 د_2$ فيحصل ك =

$$\frac{(س_2 د_3 - س_3 د_2) ج_1 + (س_1 د_3 - د_1 س_3) ج_2 + (د_1 س_2 - س_1 د_2) ج_3}{(س_2 د_3 - س_3 د_2) ب_1 + (س_1 د_3 - د_1 س_3) ب_2 + (د_1 س_2 - س_1 د_2) ب_3}$$

ولا حاجة هنا للتعويض عن ك لاستخراج قيمتي ل و م لان هذه المعادلات دورية اذ يمكن اجراء المبادلة كما في الشكل شكل ٢ بين م و ل و ك وبين ب و س و د باشكالها اي $س_1 د_1 ب_1$ و $س_2 د_2 ب_2$ و $س_3 د_3 ب_3$ دون تغيير في المعادلات الاصلية فلنا بهذا التبادل ل =

$$\frac{(ب_2 س_3 - ب_3 س_2) ج_1 + (ب_3 س_1 - س_3 ب_1) ج_2 + (س_1 ب_2 - ب_1 س_2) ج_3}{(ب_2 س_3 - ب_3 س_2) د_1 + (ب_3 س_1 - س_3 ب_1) د_2 + (س_1 ب_2 - ب_1 س_2) د_3}$$

و باجراء ذات التبادل على هذه المعادلة يحصل م =

$$\frac{(د_2 ب_3 - د_3 ب_2) ج_1 + (د_3 ب_1 - ب_3 د_1) ج_2 + (ب_1 د_2 - د_1 ب_2) ج_3}{(د_2 ب_3 - د_3 ب_2) س_1 + (د_3 ب_1 - ب_3 د_1) س_2 + (ب_1 د_2 - د_1 ب_2) س_3}$$

ملاحظة : لو اجري في المعادلات الاصلية تبادل علامات الحروف ب ، د ، س ، ج اي بين $ب_1 ب_2 ب_3$ و $د_1 د_2 د_3$ وهلم جرا لنتجت ذات

المعادلات الاصلية كما انه لو اجري هذا التبادل على الاجوبة لكان لنا من الجزء الاول الجزء الثاني ومن الثاني الثالث لذلك يسهل ترتيب هذه الدساتير باستعلامنا (س٢ د٣ — س٣ د٢) ب٢ الجزء الاول من مخرج قيمة ك

(١٨٧) الضرب المتقطع او الدستور العام ٠— خذ مسمي مجهولين في معادلتين واستعلم فضلة حاصليهما على شكل متقطع واضربها في مسمى المجهول الثالث المطلوبة قيمته من المعادلة الثالثة فيحدث الجزء الاول من المخرج

بادل بين مسميات كل من المجاهيل الثلث حسب نظامها الدوري مرة ثم اخرى فيحصل الجزءان الاخران من المخرج (حسب الملاحظة)

عوض عن مسميات المجهول المطلوب بالحدود المعلومة التي تقابلها في ذات المعادلة فتكون لك الصورة شكل ٣

مثلاً ك + ٢ ل + ٣ م = ١٠

٥ ك + ٦ ل + ٤ م = ٣١

٧ ك + ٨ ل + ٩ م = ٤٦

خذ مسميات ل، م من المعادلتين (٢) و(٣) واضربها على شكل متقطع فالفضلة ٦ × ٩ -- ٨ × ٤ اضربها في ١ مسمى ك في الاولى فالجزء الاول من المخرج (٦ × ٩ — ٨ × ٤) × ١ = ٢٢ × ١

اجرِ تبادل المسميات حسب الشكل

فالجزء الثاني منه (٨ × ٣ — ٢ × ٩) × ٥ = ٦ × ٥

وايضاً مرة اخرى فالجزء الثالث (٢ × ٤ -- ٦ × ٣) × ٧ = -- ١٠ × ٧

ثم في الصورة ضع ١٠ عوض ١ و٣١ عوض ٥ و٤٦ عوض ٧

ك = (٢٢ × ١٠ + ٦ × ٣١ — ١٠ × ٤٦) / (٢٢ × ١ + ٦ × ٥ — ١٠ × ٧) = —٥٤ / —١٨ = ٣

ثم عوض عن ك في (١) و (٢) واستعلم ل و م وحل ل [illegible]ذات الطريقة خذ مسميات ك و م من المعادلتين (٢) و (٣) واضرب فضلة حاصليهما على شكل متقطع في ٢ مسمى ل في (١)

فالجزء الاول (٥ × ٩ — ٧ × ٤) × ٢ = ١٧ × ٢

وبالتبادل . الثاني (٧ × ٣ — ١ × ٩) × ٦ = ١٢ × ٦

. . الثالث (١ × ٤ — ٥ × ٣) × ٨ = — ١١ × ٨

وفي الصورة ضع ١٠ عوض ٢ و ٣١ عوض ٦ و ٤٦ [illegible]ن ٨

ل = (١٧ × ١٠ + ١٢ × ٣١ — ١١ × ٤٦) / (١٧ × ٢ + ١٢ × ٦ — ١١ × ٨) = ٢ . [illegible]بذات الطريقة

م = (— ٢ × ١٠ + ٦ × ٣١ — ٤ × ٤٦) / (— ٢ × ٣ + ٦ × ٤ — ٤ × ٩) = ١

تمرين

(١) ٢ ك + ى = ٩ ٢ ى + ك = ١٥ ٢ ن + ى = ٣٥

(٢) ٣ ك + ٢ ى + ١/ن = ١٤ ٣ (ك + ى + ١/ن) = ١ ٢ ك = ٣ ى

(٣) ك + ى = د ب ك = ى ح ك = ن

(٤) ك + ى/٢ = ١ ى + ن/٣ = ١ ن + ك/٤ = ١

(٥) { ك + ى + ٢ ل + ٣ ن = ١٨ ل — ن = ٢
{ ك + ى + ل + ن = ١٧ ى + ٣ ل — ٤ ن = ٩

(٦) { ٤ ك — ٣ ى + ٢ م = ٩ ٢ ك + ٦ م = ٢٨
{ ٤ م — ٢ ى = ١٤ ٣ ك + ٤ م = ٢٦

(٧) { ك + ى = ٨ ك + ل = ١١ ك + م = ٦
{ ك + ن = ١٢ ن + و = ٩ ل — ٢ م = ٤

(٨) ك + ب ى = ت   ى + د ن = خ
ن + ح ل = س   ل + ر م = ص

(٩) ى + م = ٧   ك + ى = ٨   م — ٢ ل = ٢
ه + ن = ٣   ن + م = ٩   م — ك = ٢

(١٠) ك + ٢ ى = ٥   ى + ٤ ن = ١٤   ن + ٣ ل = ١٥
ل + ٥ ف = ٢٩   ف + ٧ ك = ١٢

(١١) ك + ى = ٦   ك + ن = ٨   ى + ن = ١٠

(١٢) ك — ى = ٦   ك² — ى² = ٤٨٠   ن ك — ن ى = ٣٠

(١٣) ٥ ك + ٦ ى = ١٧   ٦ ك + ٥ ى = ١٦

(١٤) ٩٣ ك + ١٥ ى = ١٢٣   ١٥ ك + ٩٣ ى = ٢٠١

(١٥) ١١ ك — ٧ ن = ٧٢   ٧ ن — ١١ ك = ٠

(١٦) ك + ٣ى + ٤ن = ١٩   ى + ٣ن + ٤ك = ١٥   ن + ٣ك + ٤ى = ١٤

(١٧) ك/٣ = ى/٤   ٥ك + ٧ى = ٤٣
(١٨) (ى + ٢ك)/٢ك = ٥/٩   ى + ٥ك = ٢٨
(١٩) ك/٥ = ٢ى/٣   ٤ك — ٦ى = ٢٢

(٢٠) ٢ك/١٥ = (٢ى — ٨)/٨   ٣ ك — ٢ ى = ٧

(٢١) ك + ٣ (ى+ن+ل) = ٢٦ ، ٢ى + ٣ (ك+ن+ل) = ٢٩
ن + ٣ (ك+ى+ل) = ٢٤ و ل + ٣ (ك+ى+ن) = ٢٣

(٢٢) ٦/ك + ٣/ى — ٤/ن = ٣   ٣/ك — ١/ى = ٠   ١٥/ك — ٢/ى + ٦٠/ن = ٣٢

(٢٣) ١/ك — ٢/ى + ٤ = ٠   ١/ى — ١/ن = — ١   ٣/ك + ٢/ن = ١٤

(٢٤) ٣/٤ك — ٢/٣ى = ١/٢ن = ٢/٣ى — ٣/٤ك + ١/٢ن = ١

الفصل الرابع

في حل مسائل تتضمن مجهولين او اكثر

(١٨٨) كل مسألة تتضمن مجهولين او اكثر يجب ان يتركب منها حسب شروطها المختلفة معادلات قدر عدد المجاهيل ليمكن حلها ولترتيب هذه المعادلات افرض لكل مجهول حرفاً مختصاً به دون مجهول اخر ثم تصرف بهذه المجاهيل حسب افادة المسألة كما لو كانت معلومة على مثال ما رأيت في ترتيب معادلة المجهول الواحد وبياناً لذلك نكتفي بحل المسائل الاتية

(١) عددان ثلث مجتمعهما ١٤ ونصف فضلتهما ٤ فما هما

ليكن الاول ك والثاني ى فبموجب الشرط الاول من المسألة

$\frac{ك+ى}{٣} = ١٤$ او ك + ى = ٤٢ (١)

وبالشرط الاخر $\frac{ك-ى}{٢} = ٤$ او ك — ى = ٨ (٢)

بحل المعادلتين ك = ٢٥ ى = ١٧

(٢) اي كسر اذا طرح ١ من صورته واضيف ٢ الى مخرجه صارت قيمته $\frac{١}{٢}$ واذا طرح ٧ من صورته و٢ من مخرجه صارت قيمته $\frac{١}{٣}$

ليكن الكسر $\frac{ك}{ى}$ فبالشرط الاول تصير الصورة ك — ١ والمخرج ى + ٢ وبالشرط الثاني تصير الصورة ك — ٧ والمخرج ى — ٢ فلنا

$\frac{ك-١}{ى+٢} = \frac{١}{٢}$ و $\frac{ك-٧}{ى-٢} = \frac{١}{٣}$

بحلها ك = ١٥ ى = ٢٦ والكسر $\frac{١٥}{٢٦}$

(٣) رجل اشترى اذرعاً من الخام ثمن كل ٣ اذرع منها ٥ غروش واذرعاً من الشيت ثمن كل ٥ منها ٩ غروش ودفع ثمنها كلها ٣٤٤٠ ثم باع

ربع مشتراه من الخام و $\frac{١}{٢}$ مشتراه من الشيت بمبلغ ١٠٨٠ غرشاً وربح بذلك ١٠٠ غرش فكم ذراعاً اشترى من كل منهما

لنكن اذرع الخام ك واذرع الشيت ى فثمن الاولى $\frac{٥ك}{٢}$ وثمن الثانية $\frac{٩ى}{٥}$ وحسب المسألة

$$\frac{٥ك}{٢} + \frac{٩ى}{٥} = ٣٤٤٠ \quad (١)$$

وثمن ربع اذرع الخام $\frac{٥ك}{١٢}$ وثمن $\frac{١}{٢}$ اذرع الشيت $\frac{٢ى}{٥}$ فحسب افادة المسألة

$$\frac{٥ك}{١٢} + \frac{٢ى}{٥} + ١٠٠ = ١٠٨٠ \quad (٢)$$

وبحلها ى = ٨٠٠ وك = ١٢٠٠

(٤) اشتغل ٧ رجال ١٢ يوماً و٥ اولاد ٩ ايام في عمل فبلغت اجرة الجميع ٢٠٤٠ ثم اشتغل الاولاد ١٣ يوماً و٥ من هولاء الرجال ١٧ يوماً واخذوا اجرتهم معاً ٢٢٠٠ غرش فكم كان يأخذ الرجل زيادة عن الولد يومياً

لنكن اجرة الرجل ك واجرة الولد ى فحسب افادة المسألة

$$٧ \times ١٢ ك + ٥ \times ٩ ى = ٢٠٤٠ \quad (١)$$

$$٥ \times ١٧ ك + ٥ \times ١٣ ى = ٢٢٢٠ \quad (٢)$$

وبحل المعادلتين ك = ٢٠ ى = ٨ وك − ى = ١٢

(٥) تركة وزعت بين عدة ورثة فاخذ الاول ٧٠ غرشاً و $\frac{١}{٧}$ الباقي ثم اخذ الثاني ١٤٠ غرشاً و $\frac{١}{٧}$ الباقي ثم اخذ الثالث ٢١٠ غروش وسبع الباقي وهكذا الى الاخير فوجدوا انصبتهم متساوية فكم هو عدد الورثة وكم التركة وكم اصاب الواحد

لنكن التركة ى وحصة الواحد ك وعدد الورثة $\frac{ى}{ك}$ فلنا

حصة الاول $ك = ٧٠ + \frac{ى - ٧٠}{٧}$ والباقي ى − ك

وحصة الثاني $ك = ١٤٠ + \frac{ى - ك - ١٤٠}{٧}$

والمعادلتان كافيتان لحل ك وى فلا حاجة لاستخراج الانصبة الباقية اطرح (٢) من (١) واتم العمل ك = ٤٢٠ ى = ٢٥٢٠ الورثة ٦

(٦) تاج الملك هيه رُون وزنه الفيلسوف ارخميدس في الهوا ١٠٠٠ درهم وفي الماء ٩٤٢ درهم فكم وجد فيه من الذهب وكم وجد من الفضة

(من المعلوم ان ثقل الذهب النوعي ١٩،٢٥ والفضة ١٠،٤٧ وأن الجسم يخسر في الما من وزنه قدر حجمه)

ليكن الذهب ك والفضة ى فيكون ك + ى = ١٠٠٠

وخسارة الذهب من وزنه في الماء $\frac{ك}{١٩،٢٥}$ وخسارة الفضة $\frac{ى}{١٠،٤٧}$ ومن كليهما حسب المسألة ١٠٠٠ — ٩٤٢ = ٥٨ فلنا

$$\frac{ك}{١٩،٢٥} + \frac{ى}{١٠،٤٧} = ٩٤٢$$

بحل المعادلتين ك = ٨٦١،٠٧٥ و ى = ١٣٨،٩٢٥

تمرين

(١) عددان فضلتها ٣٠ وثلث مجموعها ٢٠ فما هما

(٢) عددان نصف فضلتها ٦ و $\frac{٣}{٤}$ مجموعها تساوي الاصغر مع ٣٣

(٣) اربعة رجال اقتسموا ٥٨٠٠ غرش فاخذ الاول مضاعف حصة الثالث والثاني ثلثة امثال حصة الرابع والثالث والرابع اخذا ١٠٠٠ غرش اقل من الاول فكم اخذ كل منهم

(٤) $\frac{١}{١١}$ من عمر انيس اكثر بسنتين من $\frac{١}{٧}$ عمر حبيب ومضاعف عمر حبيب الان يساوي عمر انيس منذ ١٣ سنة . فكم عمرهما

(٥) يمشي فريد في ٨ ساعات ١٢ ميلاً زيادة عما يمشيه فؤاد في ٧ ساعات وفؤاد يقطع في ١٣ ساعة ٧ اميال اكثر مما يقطعه فريد في ٩

ساعات فكم هو معدل سيرها في الساعة

(٦) سليم يقطع في ١١ ساعة ١٢٠ ميل اقل مما يقطعه امين في ١٢ ساعة وامين يسير في ٥ ساعات $\frac{١}{٢}$ ٣ ميل اقل مما يسيره سليم في ٧ ساعات فما هو معدل سيرها في الساعة

(٧) اي كسر اذا اضيف ٢ الى مخرجه ساوى $\frac{١}{٢}$ واذا اضيف ٢ الى صورته ساوى $\frac{٢}{٥}$

(٨) اي كسر اذا اضيف ٢ الى صورته و١ الى مخرجه ساوى $\frac{٥}{٨}$ واذا طرح ١ من حديه ساوى $\frac{١}{٢}$

(٩) عدد ذو منزلتين قيمته ثلاثة امثال مجتمع رقميه واذا اضيف اليه ٤٥ يحدث تبادل بين رقميه في المنزلة فما هو

(١٠) قيمة رقمي عدد ١٣ والفرق بين العدد وقيمته بعد مبادلة رقميه ٢٧ فما هو

(١١) رجل اخذ عدة اثواب سوداء وزرقاء ونصف عدد السوداء منها يساوي ثُلث عدد الزرقاء ومضاعف عدد الاثواب جميعها يزيد ٤ على ٣ امثال البيضاء فكم عددها

(١٢) عدد اقل من ١٠٠٠ رقم احاده (٠) واذا تبادل رقما مئاته وعشراته نقص ١٨٠ ولو اسقط نصف عدد مئاته وتبادل رقما عشراته واحاده نقص ٤٥٤

(١٣) رجلان بينهما ٢٧ ميلاً اذا سارا لجهة واحدة يتلاقيان في ٩ ساعات واذا سارا لجهة متقابلة يتلاقيان في ٣ ساعات فما هو معدل سيرها في الساعة

(١٤) اذا سار نجيب سيرًا اعتياديًا اقتضى له ليقطع ٣٠ ميلا ٣ ساعات زيادة عن الوقت اللازم لسعيد ولو ان نجيب ضاعف خطوته لقطع تلك المسافة قبله بساعتين فكم هي سرعة كل منهما في الساعة

(١٥) صراف اراد ان يدفع ١٨ قطعة من الفرنكات والبشالك مقابل ٧٨ غرشاً فكم يجب ان يدفع من كل منهما اذا كان سعر البشالك ٣ غروش وسعر الفرنك ٥

(١٦) ما مضى من النهار ⅔ ما بقي فكم الوقت

(١٧) ثلاثة اعداد لو اخذ من ثالثها ٨ واضيف الى اولها صارت متساوية ولو اخذ من ثانيها ٨ واضيف الى ثالثها صار الاول والثاني متساويين وصار مضاعف الثالث خمسة امثال مجتمعها

(١٨) ١٢ ليرة عثمانية و١٦ انكليزية قيمتها ٣٦٧٧ غرشاً و١٦ عثمانية و١٢ انكليزية ٣٦٢٧٫٥ فكم هو سعر الليرة من النوعين

(١٩) ٥ احصنة و١٢ بقرة ثمنها ١٩٥٠٠ غرش و٧ احصنة و١٣ بقرة ثمنها ٢٦١٠٠ فكم هو سعر كل من الجنسين

(٢٠) عدة ورثة اقتسموا تركة فاخذ الاول ١٠٠ غرش وعشر الباقي منها ثم اخذ الثاني ٢٠٠ وعشر الباقي ثم اخذ الثالث ٣٠٠ وعشر الباقي وهكذا الى الاخير فوجد ان التركة انقسمت بينهم بالسواء فكم كانت التركة وكم كان عدد الورثة وحصة كل واحد منهم

(٢١) رفا حمام قالت واحدة من احدها لاخرى لو جاءتنا ٣ منكن لصار عددنا مضاعف عددكن فاجابتها الثانية لو جاءتنا ٣ منكن لصرنا متساويين فكم كان عددهما

(٢٢) لعب ثلاثة مع بعضهم واشترطوا ان المغلوب يضاعف مال الاخرين فلعبوا ٣ ادوار وخسر كل منهم دوراً فوجدوا اخيراً مع كل منهم ١٢٠ غرشاً فكم كان مع كل واحد اولاً

(٢٣) اربع قلع هاجم العدو احداها فارسلت لها كل واحدة من الباقيات انفاراً قدر ما فيها فارتد عنها العدو وهاجم الثانية فارسلت كل واحدة من الباقيات قدر ما كان فيها وهكذا الى ان ارتد العدو عن

الرابعة فصار عدد الجنود متساوياً في كل منها فكم كان في كل منها اولاً

(٢٥) رجل له فرسان وسرج قيمته ٤٠٠ غرش فاذا وضع السرج على الفرس الاول صارت قيمته مضاعف ثمن الثاني واذا وضع على الفرس الثاني صارت قيمته $\frac{٥}{٧}$ ثمن الفرس الاول فكم هو سعر كل من الفرسين

(٢٦) اقسم ٩٠ الى اربعة اقسام بحيث اذا اضيف الى الاول ٢ وطرح من الثاني ٢ وضرب الثالث في ٢ وقسم الرابع على ٢ تصير الاقسام كلها متساوية

(٢٧) رجل مزج خمرًا بماء ولو زاد من كل صنف ٤ ارطال لكان في المزيج ٧ ارطال من الخمر لكل ٦ ارطال من الماء ولو نقص من كل صنف ٨ ارطال لكان في المزيج ٦ ارطال خمر لكل ٥ ارطال ماء فكم رطلاً مزج من كل صنف

(٢٨) صائغ وزن قطعًا من الذهب والفضة فكان وزنها في الهواء ٨٤٠ درهماً ووزنها في الماء ٧٩٣,٣٠ فكم يكون عيارها (العيار الصافي ٢٤)

(٢٩) ثلاثة رجال اشتروا كرماً بمئة دينار فلو اخذ ما مع الاول نصف ما مع الثاني او ما مع الثاني وثُلث ما مع الثالث او ما مع الثالث وربع ما مع الاول كان المجتمع ثمن الدار فكم دينارًا مع كل واحد

(٣٠) ثلاثة رجال سافروا الى جهات مختلفة وكان ما قطعوه ٦٢ ميلاً وكان بُعد الاول اربعة امثال بُعد الثاني مع مضاعف بُعد الثالث. و١٧ مثل بُعد الثاني تعدل مضاعف بُعد الاول مع ثلاثة امثال بُعد الثالث فكم ميلاً بعد كل واحد منهم من مكان سفرهم

الفصل الخامس

في مناقشة المسائل والمعادلات من مجهولين

(١٨٩) لنا مما سبق دستور عام لحل مجهولين وهو (١٧٣)

$$\text{ك} = \frac{\text{ص دَ} - \text{صَ د}}{\text{ب دَ} - \text{بَ د}} \quad \text{و} \quad \text{ى} = \frac{\text{ب صَ} - \text{بَ ص}}{\text{ب دَ} - \text{بَ د}}$$

ومناقشة حلهما في ٣ حالات

١ً لتكن ص دَ − صَ د $\gtrless$ ، ب دَ − بَ د $\gtrless$ ٠ فقيمة ك الخارج الوحيد $\frac{\text{ص دَ} - \text{صَ د}}{\text{ب دَ} - \text{بَ د}}$

٢ً لتكن ص دَ − صَ د > او < ٠ ، ب دَ − بَ د = ٠ قيمة ك مستحيلة = $\frac{\text{ص دَ} - \text{صَ د}}{٠}$

٣ً لتكن ص دَ − صَ د = ٠ ، ب دَ − بَ د = ٠ قيمة ك غير معينة = $\frac{٠}{٠}$

ومثلها ى في الحالات الثلاث لان الصورة من قيمة ى تكون صفراً او > ٠ او < ٠ حسبما تكون صورة ك

مثلا ٢ ك − ٣ ى = ٥
٤ ك − ٦ ى = ١٠

$$\text{ك} = \frac{٢ \times ١٠ - ٤ \times ٥}{٢ \times -٦ - ٤ \times -٣}$$

اي ك = $\frac{٠}{٠}$ فقيمتها غير معينة ومثلها قيمة ى لان المعادلتين متلازمتان

مثال اخر ٢ ك − ٣ ى = ٥
٤ ك − ٦ ى = ٧

$$\text{ك} = \frac{٢ \times ٧ - ٤ \times ٥}{٢ \times -٦ - ٤ \times -٣}$$

اي ك = $\frac{-٦}{٠}$ وذلك مستحيل اذ لا تصح المساواة ك × ٠ = − ٦

تمرين

(١) ايّ عددين ثلث الاول منهما يساوي نصف الاخر الا ١ والثاني منهما مضاعف مجتمع ثُلث الاول و١

(٢) ايّ عددين ثُلث الاول منهما يزيد ١ عن نصف الاخر والثاني منهما يساوي ثلثي الاول مع ٦

(٣) رجل اشترى ١٥ رطلاً من الفحم و ٦ ارطال من الملح ودفع ثمنها ٢٤ غرشاً فاراد رفيقه ان يشتري بالسعر ذاته ٢٠ رطلاً من الفحم و ٨ ارطال من الملح فطلب منه البائع ٣٤ غرشاً فكم يكون سعر كل منهما وهل صدق البائع بحسابه وكم يكون السعر لو طلب ٣٢ او ٣٠ غرشاً

الباب العاشر

في المعادلات الجذرية من الدرجة الاولى ومسائلها

الفصل الاول

في حل مجهول واحد

(١٩٠) لنا مما تقدم بمقتضى الاولية الرابعة انهُ اذا ضرب طرفا معادلة في طرفي معادلة اخرى تكون الحواصل متساوية اذاً ليكن

$\sqrt{ك} = د$ بتربيع المعادلة اي ضربها في ذاتها $ك = د^{٢}$

و $\sqrt[٣]{ك} = ب$ بتكعيبها اي تكرارها ضلعاً ٣ مرار $ك = ب^{٣}$

بالعكس لنا من $ك = د^{٢}$ بتجذير الجانبين $\sqrt{ك} = د$

ومن $ك = ب^{٣}$ باخذ الجذر الكعبي منها $\sqrt[٣]{ك} = ب$

فلنا من ذلك هذه القاعدة : اذا رقي جانبا معادلة الى قوة واحدة او جذرا من دليل واحد لا تتغير المساواة

وبمقتضى هذه القاعدة تحل كل معادلة جذرية بترقية جانبيها الى قوة من اسم الجذر مثلاً $\sqrt[ن]{ك} = ح$ رفعها الى القوة النونية $ك = ح^{ن}$ واذا كانت الكمية المجهولة مرقاة تحل باخذ جذرها من اسم تلك القوة مثلاً

ك $\sqrt{ك}$ = ١٧ او $\sqrt{ك^{٣}}$ = ٢٧

خذ الجذر الكعبي من الجانبين $\sqrt{ك}$ = ٣ ثم بالتربيع ك = ٩

(١٩١) تأتي المعادلات الجذرية على هيئات مختلفة نبسط منها ما يأتي مع بيان ما يجب مراعاته في حلها فضلاً عن القواعد السابقة في حل المعادلات

اولاً : قد يكون المجهول اصماً اما منفرداً مرتبطاً بذات المسمى دائماً واما مركباً مع كمية اخرى دائماً تحت الجذر فيجب حله هكذا

استعلم قيمة المجهول الاصم مع مسماه وما تركب معه من الكميات ثم رق الجانبين حسبما سبق واستعلم قيمة المجهول المطلوب.

مثلاً $\frac{\sqrt{ك}}{٣} + ٣\sqrt{ك} = \frac{\sqrt{ك}}{١٢} + ٢٧$

بالجبر $٤\sqrt{ك} + ٢٤\sqrt{ك} = \sqrt{ك} + ٢٧ \times ١٢$

بالمقابلة $٢٧\sqrt{ك} = ٢٧ \times ١٢$ و $\sqrt{ك} = ١٢$

ثم بتربيع الجانبين ك = ١٤٤

مثال (٢) $\frac{\sqrt{٥ك}}{٣} + ٣ = ٢\sqrt{٥ك} - \frac{\sqrt{٥ك}}{٧} - \frac{٥\sqrt{٥ك} - ١٢}{٣}$

بالجبر $٧\sqrt{٥ك} + ٦٣ = ٤٢\sqrt{٥ك} - ٣\sqrt{٥ك} - ٣٥\sqrt{٥ك} + ٨٤$

بالمقابلة $٣\sqrt{٥ك} = ٢١$ بالقسمة على ٣ $\sqrt{٥ك} = ٧$

ربع الجانبين ٥ك = ٤٩ ومنها ك = $\frac{٤٩}{٥}$

مثال(٣) $٥\sqrt[٣]{٧-ك} + \frac{٣\sqrt[٣]{٧-ك} + ٤}{٥} = \frac{٧\sqrt[٣]{٧-ك} + ١٠}{٢}$

بالجبر $٥٠\sqrt[٣]{٧-ك} + ٦\sqrt[٣]{٧-ك} + ٨ = ٣٥\sqrt[٣]{٧-ك} + ٥٠$

بالمقابلة $٢١\sqrt[٣]{٧-ك} = ٤٢$ ومنها $\sqrt[٣]{٧-ك} = ٢$

كعب الجانبين ٧ — ك = ٨ ومنها ك = — ١

ثانياً : قد يكون المجهول الاصم في معادلة واحدة تارةً منفرداً وتارة مركباً مع كمية اخرى سواء وجد في المعادلة حد معلوم ام لا وقد يكون مركباً تارةً مع كمية وتارةً مع اخرى ولا حد معلوم في المعادلة فيجب حينئذٍ مراعاة ما ياتي

انقل المجهول المركب الى جهة والمجهول الاخر الى جهة اخرى مع المعلوم اذا وجد ثم رقِ الجانبين واتم العمل كما سبق

مثال (١) $\sqrt{٨+ن} - \sqrt{ن} = ٢$

انقل المجهول المنفرد الى جهة مع المعلوم

$\sqrt{٨+ن} = ٢ + \sqrt{ن}$ بتربيع الجانبين

$٨+ن = ٤ + ٤\sqrt{ن} + ن$ وبالمقابلة $٤ = ٤\sqrt{ن}$

ومنها $\sqrt{ن} = ١$ بالتربيع $ن = ١$

مثال (٢) $\sqrt{\sqrt{ك^٢+٩ك+٩}} - \sqrt{ك+٤} = ٠$

بنقل الحد الثاني $\sqrt{\sqrt{ك^٢+٩ك+٩}} = \sqrt{ك+٤}$

بالترقية الى القوة الرابعة $ك^٢+٩ك+٩ = ك^٢+٨ك+١٦$

بالمقابلة $ك = ٧$

مثال (٣) $٢د - \sqrt{٤د^٢ - ك^٢} = ٢ك$

انقل ٢ ك الى جهة المعلوم والمجهول المركب الى جهة اخرى

$٢د - ٢ك = \sqrt{٤د^٢ - ك^٢}$ ربع الجانبين

$٤د^٢ - ٨دك + ٤ك^٢ = ٤د^٢ - ك^٢$ بالمقابلة

$٥ك^٢ = ٨دك$ اقسم على ك

$٥ك = ٨د$ ومنها $ك = \frac{٨د}{٥}$

تنبيه : قسمنا على ك المعادلة $٥ك^٢ = ٨دك$ وهي من الدرجة الثانية ولها حلان كما سياتي فحلها الاخر هو ان نجعل بمقتضى (ملاحظة ١٤٩)

الكمية المقسوم عليها الطرفان $\text{ك} = ٠$

مثال (٤) $\frac{١}{\sqrt{\text{١+ن}}+١} + \frac{١}{\sqrt{\text{١+ن}}-١} = \frac{١}{\text{ن}}$

بالجبر وليكن المخرج المشترك ن اي $(\sqrt{\text{١+ن}}+١)(\sqrt{\text{١+ن}}-١)$

$\sqrt{\text{١+ن}}-١+\sqrt{\text{١+ن}}+١ = ١$ بالمقابلة

$٢\sqrt{\text{١+ن}} = ١$ و $\sqrt{\text{١+ن}} = \frac{١}{٢}$ ربّع الطرفين

$١+\text{ن} = \frac{١}{٤}$ وبالمقابلة $\text{ن} = -\frac{٣}{٤}$

ثالثاً يتفق ان يكون المجهول مركباً مع الكميات على صور مختلفة في جملة حدود فحينئذ يجب اختبار نقل المجاهيل الانسب لافنا بعض الحدود المجهولة وفي الغالب تحول الى معادلات من الدرجة الثانية او ما فوقها

مثلاً $\sqrt{\text{د+ك}}+\sqrt{\text{د−ك}} = ٢\sqrt{\text{ك}}$

يصح تربيع المعادلة كما هي ويحسن نقل $\sqrt{\text{د−ك}}$ ايضاً فلنا بالتربيع

$٢\,\text{د} + ٢\sqrt{\text{د}^٢-\text{ك}^٢} = ٤\,\text{ك}$

بنقل ٢ د ثم القسمة على ٢ $\sqrt{\text{د}^٢-\text{ك}^٢} = ٢\,\text{ك} - \text{د}$

ربع الجانبين $\text{د}^٢ - \text{ك}^٢ = ٤\,\text{ك}^٢ - ٤\,\text{د}\,\text{ك} + \text{د}^٢$

وبالمقابلة والقسمة على ٥ ك $\text{ك} = \frac{٤\,\text{د}}{٥}$

(١٩٢) مما يسهل حل هذه المعادلات مراجعة نظريات الكسر وتطبيق العمل عليها كما مر بك في حل المعادلات البسيطة

مثال ١ $\frac{١+\sqrt{\text{ك−ب}}}{١+٢\,\text{د}\sqrt{\text{ك−ب}}} = \frac{١}{١+\text{د}\sqrt{\text{ك−ب}}}$

وحسب (٨٠ نظ ٤) كل منهما يساوي فضلة الصورتين على فضلة المخرجين

الصورة فيهما ١ $\frac{١}{١ + \text{د}\sqrt{\text{ك} - \text{ب}}} = \frac{\sqrt{\text{ك} - \text{ب}}}{\text{د}\sqrt{\text{ك} - \text{ب}}}$ او $= \frac{١}{\text{د}}$

اذًا $١ + \text{د}\sqrt{\text{ك} - \text{ب}} = \text{د}$

بالمقابلة والقسمة على د $\sqrt{\text{ك} - \text{ب}} = \frac{\text{د} - ١}{\text{د}}$

بالتربيع ثم نقل — ب $\text{ك} = \left(\frac{\text{د} - ١}{\text{د}}\right)^{٢} + \text{ب}$

مثال (٢) $\frac{\sqrt{٦\text{ك}} - ٢}{\sqrt{٦\text{ك}} + ٢} = \frac{٤\sqrt{٦\text{ك}} - ٩}{٤\sqrt{٦\text{ك}} + ٦}$ حسب (نظ ٤)

$\frac{٢\sqrt{٦\text{ك}}}{٤} = \frac{٨\sqrt{٦\text{ك}} - ٣}{١٥}$

بالجبر والمقابلة $٢\sqrt{٦\text{ك}} = ١٢$ و $\sqrt{٦\text{ك}} = ٦$

بتربيع الجانبين $٦\text{ك} = ٣٦$ ومنها $\text{ك} = ٦$

ويحسن ايضاً كما مر (١٥٣) رفع الكسور قبل الجبر مثلاً

$\frac{٦\sqrt{\text{ك}} - ١١}{٣\sqrt{\text{ك}}} = \frac{٢\sqrt{\text{ك}} + ١}{\sqrt{\text{ك}} + ٦}$

برفعها $٢ - \frac{١١}{٣\sqrt{\text{ك}}} = ٢ - \frac{١١}{\sqrt{\text{ك}} + ٦}$

اسقط ٢ تجد الصورتين — ١١ فالمخرجان متساويان ايضاً

اي $٣\sqrt{\text{ك}} = \sqrt{\text{ك}} + ٦$ ومنها $\text{ك} = ٩$

(١٩٣) ومن الواجب الانتباه خصوصاً في معادلات الحالة الثالثة الى رد المعادلات الى هيئة ابسط بتطبيق الصور او المخارج اللازمة

مثلاً $\frac{\sqrt{\text{ك}} + \sqrt{\text{ك} - \text{ب}}}{\sqrt{\text{ك}} - \sqrt{\text{ك} - \text{ب}}} = \frac{\text{ن}^{٢}\,\text{ب}}{\text{ك} - \text{ب}}$

بتنطيق صورة الكسر الاول والقسمة على ب

$$\frac{1}{\left(\sqrt{\text{ك}}-\sqrt{\text{ك}-\text{ب}}\right)^2}=\frac{\text{ن}^2}{\text{ك}-\text{ب}}$$ بتجذير الجانبين

$$\frac{1}{\sqrt{\text{ك}}-\sqrt{\text{ك}-\text{ب}}}=\frac{\text{ن}}{\sqrt{\text{ك}-\text{ب}}}=(\text{نظ ٤})\ \frac{\text{ن}+1}{\sqrt{\text{ك}}}$$

بالتربيع $$\frac{\text{ن}^2}{\text{ك}-\text{ب}}=\frac{\text{ن}^2+2\text{ن}+1}{\text{ك}}=(\text{نظ ٤})\ \frac{2\text{ن}+1}{\text{ب}}$$

ومنها حسب (١٥٢) $$\text{ك}=\frac{\text{ب}(\text{ن}+1)^2}{2\text{ن}+1}$$

مثال (٢) $$\frac{\sqrt[3]{\text{ب}^2}}{\sqrt[3]{\text{ك}^2}+\sqrt[3]{\text{ب}\text{ك}}+\sqrt[3]{\text{ب}^2}}=1$$

نطق المخرج بضرب حدي الكسر في $\sqrt[3]{\text{ك}}-\sqrt[3]{\text{ب}}$ لان المخرج سلسلة من قواتهما

$$\frac{\sqrt[3]{\text{ب}^2\text{ك}}-\text{ب}}{\text{ك}-\text{ب}}=1$$ بالجبر واسقاط — ب من الطرفين

$$\sqrt[3]{\text{ب}^2\text{ك}}=\text{ك}$$ بتكعيبها $$\text{ب}^2\sqrt{\text{ك}}=\text{ك}\sqrt{\text{ك}}$$

بالقسمة على $\sqrt{\text{ك}}$ $\text{ك}=\text{ب}^2$

الفصل الثاني

في حل مجهولين او اكثر

(١٩٤) يجري حلها حسب الاصول السابقة تماماً غير انه توخذ قيمة جذر المجهول معا تركب معه

مثال (١) $٥\sqrt{ك} - ٣\sqrt{ن} = ٣$ (١)

$٢٥\sqrt{ك} - ٩\sqrt{ن} = ٨١$ (٢)

اذن بضرب (١) في ٥ $٢٥\sqrt{ك} - ١٥\sqrt{ن} = ١٥$ (٣)

اطرح (٣) من (٢) $٦\sqrt{ن} = ٦٦$ و $\sqrt{ن} = ١١$

بالتعويض عن $\sqrt{ن}$ في (١) $٥\sqrt{ك} - ٣ = ٣٣$

ومنها $\sqrt{ك} = \frac{٣٦}{٥}$ وكما سبق $\sqrt{ن} = ١١$

بالتربيع فيهما $ك = (\frac{٣٦}{٥})^٢$ و $ن = ١٢١$

مثال (٢) $٧\sqrt{٣ك + ى} - ٣\sqrt{٨ك + ٣ى} = ٦$ (١)

$٥\sqrt{٣ك + ى} + ٦\sqrt{٨ك + ٣ى} = ٤٥$ (٢)

اولاً يجب حل قيمتي $\sqrt{٣ك + ى}$ و $\sqrt{٨ك + ٣ى}$ ثم مجذوريهما ثم ك و ى

اضرب (١) في ٢

$١٤\sqrt{٣ك + ى} - ٦\sqrt{٨ك + ٣ى} = ١٢$ (٣)

اجمع (٢) و (٣) $١٩\sqrt{٣ك + ى} = ٥٧$

ومنها $\sqrt{٣ك + ى} = ٣$ عوض بها في الجذر

$٧ + ٣ - ٣\sqrt{٨ك + ى} = ٦$ ومنها بالمقابلة ثم القسمة على ٣

$\sqrt{٨ك + ٣ى} = ٥$ وسبق ان $\sqrt{٣ك + ى} = ٣$

بالتربيع فيهما $٨ك + ٣ى = ٥$ و $٣ك + ى = ٩$

بحل المعادلتين حسبما سبق $ك = ٢$ $ى = ٣$

تمرين

(١) $٥ + ٢\sqrt{ك} - \frac{٤}{٥} = ٨$ (٢) $٦\sqrt{\frac{ك}{٥}} = ١٢$

(٣) $\frac{\sqrt{ك} + ٢٨}{\sqrt{ك} + ٤} = \frac{\sqrt{ك} + ٣٨}{\sqrt{ك} + ٦}$ (٤) $\sqrt{ك} + ٤ = ٩$

(٥) $\sqrt{12+\text{ك}} = 2\sqrt{\text{ك}}$　　(٦) $\sqrt{\text{ك}-\text{د}} = \sqrt{\text{ك}} - \frac{1}{2}\sqrt{\text{د}}$

(٧) $\frac{28+\sqrt{\text{ك}}}{28-\sqrt{\text{ك}}} = \frac{9+3\sqrt{\text{ك}}}{9+2\sqrt{\text{ك}}}$　　(٨) $\frac{\text{ب ك}-1}{\sqrt{\text{ب ك}}+1} = 4 + \frac{\sqrt{\text{ب ك}}-1}{2}$

(٩) $\frac{\sqrt{\text{د}}+\sqrt{\text{د}-\text{ك}}}{\sqrt{\text{د}}-\sqrt{\text{د}-\text{ك}}} = \frac{1}{\text{د}}$　　(١٠) $\frac{13-2\sqrt{\text{ن}-5}}{13+2\sqrt{\text{ن}-5}} = \frac{3}{23}$

(١١) $\sqrt{12+\text{ن}} = 2+\sqrt{\text{ن}}$　　(١٢) $\sqrt{\text{ن}} + \sqrt{4+\text{ن}} = \frac{2}{\sqrt{\text{ن}}}$

(١٣) $2+\sqrt{3\text{م}} = \sqrt{5\text{م}+4}$　　(١٤) $\text{د}+\text{ن}+\sqrt{\text{د}^2+\text{ن}^2} = \text{ح}$

(١٥) $\sqrt{2\text{ى}-27\text{د}} = 9\sqrt{\text{د}} - \sqrt{2\text{ى}}$　　(١٦) $\sqrt{4\text{ك}+17} = 2\sqrt{\text{ك}}+1$

(١٧) $\frac{\sqrt{2\text{ى}}+\sqrt{3-2\text{ى}}}{\sqrt{2\text{ى}}-\sqrt{3-2\text{ى}}} = \frac{2}{2}$　　(١٨) $\sqrt{\text{ى}}+\sqrt{9+\text{ى}} = \frac{45}{\sqrt{9+\text{ى}}}$

(١٩) $\sqrt{\text{ك}}+\sqrt{\text{ب}-\sqrt{\text{ب ك}+\text{ك}^2}} = \sqrt{\text{ب}}$　　(٢٠) $\sqrt{5\text{ك}+10} = 2+\sqrt{5\text{ك}}$

(٢١) $\text{ك}+\text{د} = \sqrt{\text{د}^2+\text{ك}\sqrt{\text{د}^2+\text{ك}^2}}$

(٢٢) $\sqrt{\text{ك}^2+2\text{ك}} + \sqrt{\text{ك}^2-2\text{ك}} = 2\sqrt{5}$

(٢٣) $\sqrt{4+\text{ن}} = \sqrt[4]{\text{ن}^2+2\text{ن}+9}$

(٢٤) $\sqrt{8+\text{ك}} - \sqrt{\text{ك}} = 2\sqrt{1+\text{ك}}$

(٢٥) $\sqrt{\text{ب}-\text{ك}} + 2\sqrt{\text{ب}+\text{ك}} = \sqrt{\text{ب}-\text{ك}+\sqrt{\text{ب ك}+\text{ك}^2}}$

(٢٦) $\text{ب}+\text{د} = \frac{2\text{ب}+\sqrt{1+\text{ن}^2}}{\text{ن}+\sqrt{1+\text{ن}^2}}$

(٢٧) $\sqrt{\text{ى}}+\sqrt{\text{ب}+\text{ى}} = \frac{2\text{ب}}{\sqrt{\text{ب}+\text{ى}}}$

(٢٨) $\sqrt[3]{2+\frac{1}{2}\text{ى}} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{16\text{ى}^2+8\text{ى}+320}$

(٢٩) $\frac{١ + \sqrt{\text{ك} - ١}}{١ + ٢\text{ب}\sqrt{\text{ك} - ١}} = \frac{\sqrt{\text{ك} - ١} - ١}{\text{ك} - ٢}$

(٣٠) $\frac{١}{\sqrt[١٠]{٤\text{ى}^{٥}} - \sqrt[١٠]{٨\text{ى}^{٤}} + \sqrt[٥]{٢\text{ى}} - \sqrt[١٠]{٢\text{ى}} + ١} = ١$

(٣١) $٣\sqrt{\text{ك} + ٧} - ٥\sqrt{١١ - \text{ى}} = ٣$

$٦\sqrt{\text{ك} + ٧} - ٢\sqrt{١١ - \text{ى}} = ٣٠$

(٣٢) $٦\sqrt{\text{ك} + ٢\text{ى}} + ٥\sqrt{١٣\text{ك} + ٣\text{ى}} = ٦٥$

$٧\sqrt{\text{ك} + ٢\text{ى}} - ٣\sqrt{١٣\text{ك} + ٣\text{ى}} = ١٤$

(٣٣) $\frac{\sqrt{٥\text{ك} + \text{ى}}}{\text{ك}} + \frac{\sqrt{٥\text{ك} + \text{ى}}}{\text{ى}} = ١٠\frac{٢}{٣}$ $\qquad$ $\text{ك} = ٢\frac{١}{٢}$

$\frac{\sqrt{٣\text{ك} - \text{ى}}}{\text{ك}} - \frac{\sqrt{٣\text{ك} - \text{ى}}}{\text{ى}} = \frac{٤}{٥}$ $\qquad$ $\text{ى} = ١\frac{١}{٢}$

(٣٤) $\sqrt{\text{ك}} - \sqrt{\text{ب} - \text{ى}} = \sqrt{\text{ك} - \text{ى}}$ $\qquad$ $\text{ك} = \frac{٥}{٤}\text{ب}$

$٢\sqrt{\text{ك} - \text{ى}} + ٢\sqrt{\text{ب} - \text{ى}} = ٥\sqrt{\text{ب} - \text{ى}}$ $\qquad$ $\text{ى} = \frac{٤}{٥}\text{ب}$

(٣٥) $\sqrt{\text{ك} + \text{ى}} + \sqrt{\text{ك} - \text{ى}} = \frac{١}{\text{ب}}\left(\text{ك}\,\text{ى} - \text{ى}\sqrt{\text{ك}^{٢} - \text{ى}^{٢}}\right)$

$\sqrt[٤]{\text{ك} + \text{ى}} + \sqrt[٤]{\text{ك} - \text{ى}} = \text{د}$

$\text{ك} = \frac{١}{٤}\left\{\frac{\text{د}^{٢}}{٢} + \frac{٢\text{ب}^{٢}}{\text{د}^{٢}}\right\} + \frac{١}{٢}\sqrt{٢\text{ب}^{٢}}$

$\text{ى} = \sqrt{\frac{\text{د}^{٢}}{٢}\left|\frac{\text{ب}}{٢} + \frac{\text{ب}}{\text{د}^{٢}}\right.}$

الفصل الثالث

في حل المسائل الجذرية

(١٩٥) يجب في ترتيب معادلات هذا الباب وحل مسائله مراعاة الاصول السابقة في حل بقية المعادلات البسيطة

(١) سئل رجل عن ماله فقال لو اضيف اليه ٦٤ ريالاً واخذ الجذر المالي من المجتمع لزاد الحاصل ريالين عن جذره المالي فكم كان

الحل : ليكن ماله ك اضف اليه ٦٤ وخذ جذر المجتمع المالي فهو $\sqrt{\text{ك} + ٦٤}$ وذلك يساوي $\sqrt{\text{ك}} + ٢$ فالمعادلة $\sqrt{\text{ك} + ٦٤} = \sqrt{\text{ك}} + ٢$ ومنها $\text{ك} = ٢٢٥$

(٢) راعٍ عنده قطيعان من الغنم سئل عن عدد الرؤوس في كل منهما فاجاب لو اخذ الجذر المالي من فضلتهما ومن فضلة الاصغر من ١٠٠ لكان مضاعف الجذر الاول يساوي ثلاثة امثال الجذر الثاني ، ومجتمع الجذرين معاً يساوي الجذر المالي من عدد الاكبر

ليكن عدد الاول ك وعدد الثاني ى فالجذر المالي من فضلتهما $\sqrt{\text{ك} - \text{ى}}$ والجذر المالي من فضلة الثاني و ١٠٠ هو $\sqrt{١٠٠ - \text{ى}}$ وحسب المسألة

$$٢\sqrt{\text{ك} - \text{ى}} = ٣\sqrt{١٠٠ - \text{ى}} \qquad (١)$$

$$\sqrt{\text{ك} - \text{ى}} + \sqrt{١٠٠ - \text{ى}} = \sqrt{\text{ك}} \qquad (٢)$$

ثم بالحل لنا بالتعويض عن $\sqrt{\text{ك} - \text{ى}}$ في الثانية بقيمتها من الاولى $\frac{٣}{٢}\sqrt{١٠٠ - \text{ى}} + \sqrt{١٠٠ - \text{ى}} = \sqrt{\text{ك}}$

بالجبر وتربيع الجانبين $٢٥٠٠ - ٢٥\,\text{ى} = ٤\,\text{ك}$ (٣)

ومن تربيع الاولى $٤\,\text{ك} - ٤\,\text{ى} = ٩٠٠ - ٩\,\text{ى}$ (٤)

ومن هاتين $\text{ى} = ٨٠$ $\text{ك} = ١٢٥$

تمرين ومسائل رياضية

(١) اي عدد فضلة جذره المالي وجذر مجموعه الى ٤٠ تساوي ٤

(٢) اي عدد لو طرح ٥ من مضاعفه واخذ الجذر المالي من المجتمع ثم اضيف ١٦ الى ثلثة امثال الحاصل ساوى ما كان الجذر المالي من مجموع ٣٦ الى ١٥ مثل العدد

(٣) نسبة مال فريد الى مال فؤاد :: ٣ : ٥ ولو طرح من الاول ٥ ومن الثاني ٩ لكانت النسبة بين جذري الفضلتين الماليين :: ٧ : ١٠

(٤) سئل رجل عن عمره فقال لو اضيف اليه ١٠ ثم اخذ جذر المجتمع المالي وطرح ٢ مما كان بقي ٦ فكم كان عمره

(٥) عددان فضلتها ٣ ومجتمع جذريهما الماليين ٥ فما هما

(٦) ايُّ عددين فضلتها ٩ ولو اخذ مضاعف مجتمعهما وطرح منه ١ لكان جذر الباقي المالي مساويًا مجتمع جذريهما الماليين

(٧) سئلت امرأة عن عمر ولدها فقالت لو اخذ مجموع عمره الى ٤ والباقي من طرحه من ٤ لكان جذراها الكعبيان مساويين الجذر الكعبي من المجتمع مع الباقي فكم كان عمره

(٨) نسبة اضلاع مثلث قائم الزاوية الى بعضها كالنسبة بين ٣،٤،٥ ومساحته السطحية ٢٤ مترًا مربعًا فكم هو طول كل من اضلاعه

(٩) مثلث قاعدته ٣٢ دسيمترًا وارتفاعه ١٨ فما هو طول كل من ضلعي مستطيل مرسوم داخله اذا كان مجموع طوليهما ٥٠

(١٠) ما هو طول ضلعي مستطيل اذا زادت قاعدته ٥ اذرع ونقص ارتفاعه ٤ تنقص مساحته ٢٠ ذراعًا مربعًا واذا نقصت قاعدته ٤ اذرع وزاد ارتفاعه ٥ اذرع تزيد مساحته ٥٩ ذراعًا مربعًا

(١١) مثلث متساوي الساقين مرسوم في دائرة نصف قطرها ١٥ مترًا وطول ضلعيه المتساويين ٢٤ فما هو طول قاعدته

(١٢) شبه منحرف ضلعاه المتوازيان د و ب وارتفاعه ع فما هو ارتفاع المثلث الذي يحصل من اخراج الضلعين المتوازيين الى ان يتقاطعا

(١٣) اجد على قاعدة مثلث نقطة يكون البعدان منها الى الضلعين الاخرين متساويين

(١٤) ما هو نصف قطر دائرة تحيط بمثلث قائم الزاوية اضلاعه ١٥ و٢٠ و٢٥

(١٥) المطلوب رسم ثلاث دوائر متماسة مراكزها رؤوس مثلث واحد

(١٦) اسطوانتان من قاعدة واحدة العليا منهما من الخشب وطولها متر والسفلى من البلاتين القيتا في الماء فغمرها حتى سطح العليا فكم كان طول الاسطوانة السفلى (ثقل الخشب النوعي ٠،٥ وكثافة البلاتين ٢١،٥)

(١٧) سبيكة فضة من عيار ب وزنها د فكم يجب ان يزاد عليها من سبيكة اخرى عيارها ح لتصير من عيار س

(١٨) مخروط من حديد نصف قطر قاعدته ٠،٠٦ متر وعلوه ٠،٢٠ متر القي ورأسه من اسفل في الزئبق فكم يغمر الزئبق من علوه (كثافة الحديد ٧،٧٩ وكثافة الزيبق ١٣،٥٩٦)

(١٩) قطعة حديد سقطت من بالون و بلغت سطح الارض في ١٢ ثانية فكم كان ارتفاع البالون (معدل السقوط ٤،٩ متر في اول ثانية)

(٢٠) رجل وضع ثوباً في احدى كفتي ميزان واقةً في الاخرى فحفظت الموازنة بينهما ثم وضع الثوب في الكفة الثانية فاقتضت الموازنة ان يضع في الاولى علاوة على الاقة ٨٠ درهماً فما هي النسبة بين ذراعي الميزان وما هو وزن الجسم الحقيقي

تم الجزء الاول ويليه الجزء الثاني بعون الله

هذا ولما كان الغرض من هذا الكتاب مجرد الخدمة العلمية أطلعت عليه تحقيقاً لبلوغي هذه الامنية حضرة العالمين العاملين والرياضيين الفاضلين استاذنا الشهير اسعد افندي الشدودي والعلامة النحرير ابرهيم افندي الحوراني وبالنظر لما يعهد فيهما من طول الباع وسعة الاطلاع والتحري في تقرير الحقائق وتأدية الشهادات الصادقة والاقوال الحقة جعلت شهادتيهما الاتيتين ريّا خزامه ومسك ختامه

طالعت الجزء الاول من كتاب سبائك التبر في اصول الجبر فوجدته تأليفاً نفيساً لم ينسج على منواله في العربية نظراً لحسن ترتيبه ووفرة فوائده وبديع اسلوبه الجديد فقد تضمن ما لم يُدرَك الا باجهاد الفكرة وممارسة البحث فننصح لارباب هذا الفن ومديري المدارس بالاعتماد على هذا المؤلَّف الجدير بالمطالعة والتدريس ونمحض حضرة المؤلِّف الفاضل خالص الثناء على خلوص خدمته العلمية

تحريراً في ١٥ نيسان سنة ١٩٠١

كاتبه

اسعد الشدودي

كتاب سبائك التبر من احسن ما أُلِف في علم الجبر . فانه حسن التبويب مُحكَم الترتيب . متين المباني جلّي المعاني . غزير المادة سهل الجادّة . جامع الاصول حريّ بالقبول . فليرِدْ الطلاب سلسال وِردِه ويشاركونا في مدح ناسج بُرْدِه

في ٢٢ نيسان سنة ١٩٠١

كاتبه

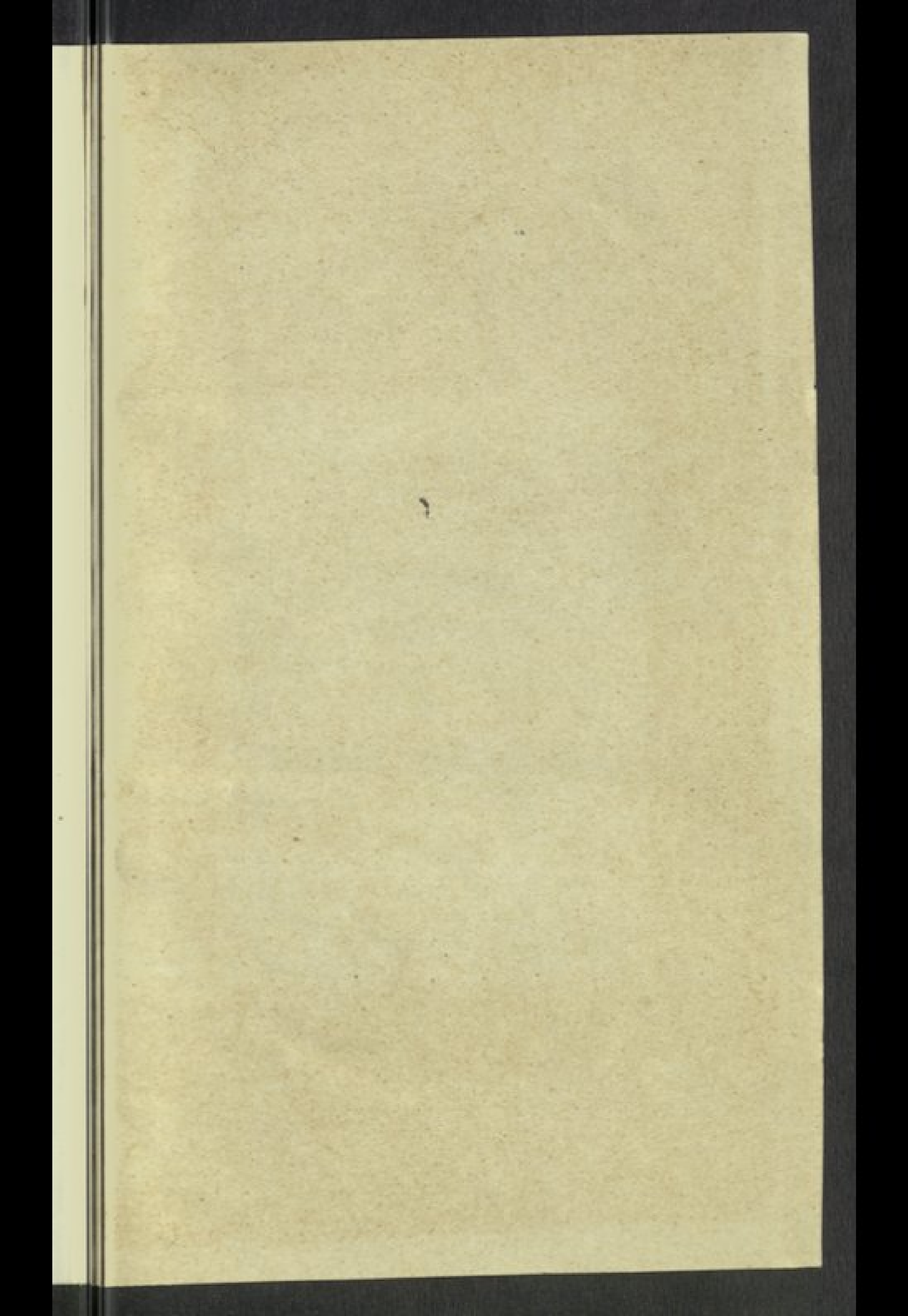
ابرهيم الحوراني

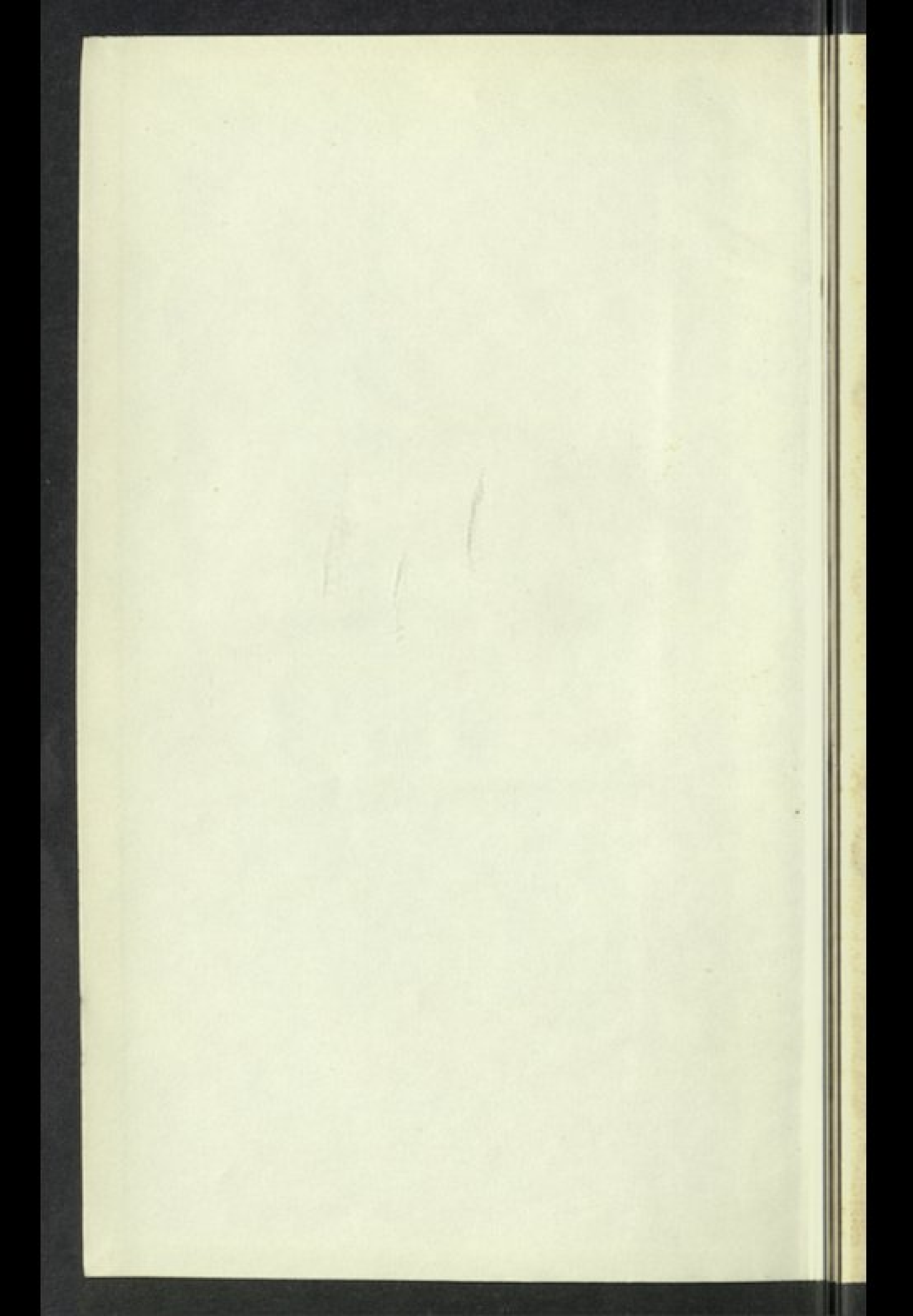
اصلاح خطأ

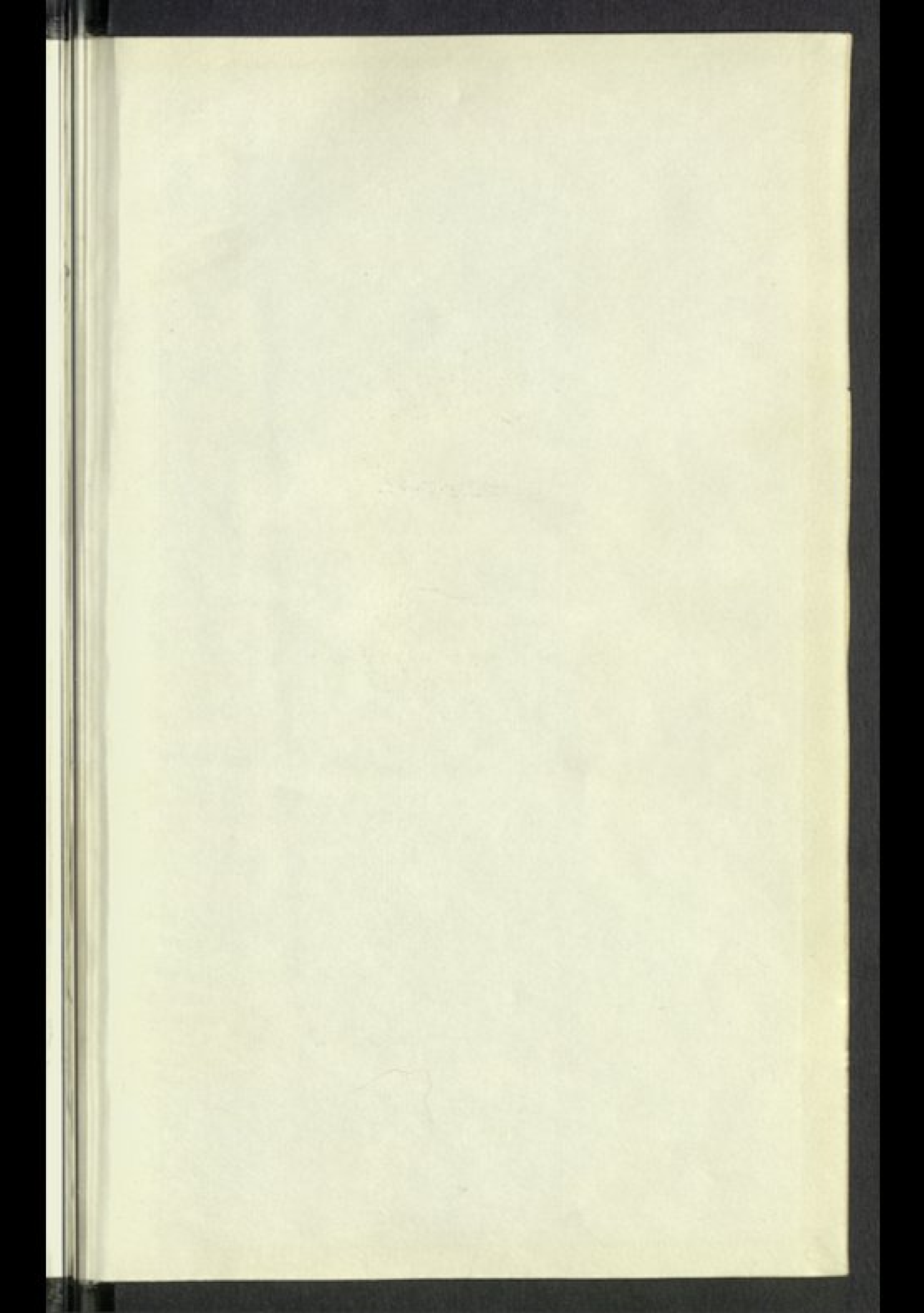
وجه	سطر	خطا	صواب
١٣	١٤	١٠٥	٨٠
١٦	٥—١٤	غرشاً	غرشٍ
١٦	٩		ليكن (ع معدل الواحد) و م
١٧	١٦	$\frac{١}{}$	$\frac{١}{٢}$
٣٥	١٥	الاعلى فما تحته	العليا فما دونها
٥٥	٢	+ ٣ ك	+ ٣ $ك^{٢}$
٩٥	٢١	٥َ	٥ً بمبادلة
١٦٩	٢٠		صحيحة ودستوره = $\frac{د}{ص}$
١٩٣	٢٣	ومجهولين	(حذفها)

ووقعت عند الطبع اغلاط غيرها ظاهرة للبيب

صفحة	سطر	خطا	صواب
٩١	٣	د — ب	د ؛ ب
٩٤	١٢	فسابق ثان فتالٍ اول	فتالٍ اول فسابق ثان
١١٨	٤	٢٤٣ $\text{ك}^{٤}$	٢٤٣ $\text{ب}^{٤}$
١٢٨	١٠	$\sqrt[٢]{\text{ك}\frac{٢٢}{٥}}$	$\sqrt[٢]{\text{د}\frac{٢٢}{٥}}$
١٣٠	١٣	٤ب $\sqrt[٢]{\text{ب}^{٢}}\text{د}^{٤}$	٤ب $\sqrt[٢]{\text{ب}^{٢}\text{د}^{٤}}$
١٣٨	٩	٢ (المخرج)	$\sqrt{٢}$
١٣٩	١٦	$\sqrt{\text{م} - \sqrt{\text{ن}}}$	$\sqrt{\text{م} - \sqrt{\text{ن}}}$
١٤١	٢	— ب	$-\sqrt[٢]{\text{ب}^{٢}}$
١٤٢	١٩	— ب	$-\text{ب}^{٢}$
١٥٣	١٧	$\frac{١٢}{٥}$	$١\frac{٢}{٥}$
١٧٤	٧—٨	يزيد — ينقص	ينقص — يزيد
١٧٦	٢	٣ د	٣ + د
١٨٥	١٣	ى ، ص	م ، صَ
٢٢١	٣	د $\sqrt[٢]{\text{ك}}$ — ب	د $\sqrt[٢]{\text{ك} - \text{ب}}$
٢٣٢	١٥	$\sqrt{\text{ك} - \text{ب}}$	$\sqrt{\text{ك}}$ — ب
٢٢٣	١٤	في الجذر	في (١) عن الجذر
٢٢٣	١٥	صوابه	٧ × ٣ — ٣ $\sqrt[٢]{٨\text{ك} + ٣\text{ى}}$
٢٢٨	٢	المتوازيين	الاخرين
٢٢٨	٢١	الجسم	الثوب








AMERICAN UNIVERSITY OF BEIRUT
UT VITAM HABEANT ABUNDANTIUS HABEANT
1866
UNIVERSITY
LIBRARY